Algebraische Methoden der Quantentheorie

Michael Keyl

Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, SoSe 97

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Ein motivierendes Beispiel

Bevor wir die Theorie der Operatoralgebren studieren, wollen wir in diesem Kapitel zunächst genauer diskutieren, warum eine algebraische Formulierung der Quantentheorie von Nutzen sein kann. Zu diesem Zwecke werden wir eine bestimmte Klasse von Modellen aus der Quantenfeldtheorie untersuchen, nämlich skalare Quantenfelder die mit klassischen Quellen wechselwirken.

Vorbild für dieses Kapitel war der entsprechende Abschnitt im Buch von Emch [Emc72] welches zum Teil die Grundlage für die folgenden Ausführungen ist (Ich habe jedoch versucht *wesentlich* ausführlicher zu sein). Weite Teile der Abschnitte über freie Felder gründen sich teilweise auch auf [RS75, X.7].

Bevor wir nun beginnen, möchte ich noch darauf hinweisen, daß es sich *nicht* um eine Vorlesung über Quantenfeldtheorie handelt. Das heißt, obwohl in diesem Kapitel ein relativ hoher Grad an Selbstkonsistenz angestrebt ist, kann eine Reihe von Aspekten, die aus Sicht der Quantenfeldtheorie von großer Wichtigkeit sind, nicht oder nur unzureichend diskutiert werden.

1.1 Die Klein-Gordon-Gleichung

Ausgangspunkt soll das freie skalare Feld auf dem Minkowskiraum sein, das heißt wir suchen nach Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,x) - \Delta\psi(t,x) + m^2\psi(t,x) = 0. \tag{1.1}$$

Bevor wir operatorwertige Felder betrachten, die diese Gleichung erfüllen, ist es nützlich zunächst ihre *klassischen* Lösungen zu untersuchen. Das heißt wir wollen für den Rest dieses Abschnittes annehmen, daß

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}), \quad \psi(t, \cdot\,) =: \psi_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

gilt, wobei $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ den Raum der komplexwertigen Schwartzfunktionen auf dem $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Da also jedes ψ_t nach Voraussetzung eine Schwartzfunktion ist, können wir Gleichung (1.1) bezüglich der drei Raumkoordinaten fouriertransformieren und erhalten

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\psi}_t(k) + \|k\|^2\hat{\psi}_t + m^2\hat{\psi}_t = 0 \tag{1.3}$$

wobei $\hat{\psi}_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Fouriertransformierte von ψ_t bezeichnet. Wir erhalten also für jedes $k \in \mathbb{R}^3$ eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in t welche die folgende Lösung besitzt:

$$\hat{\psi}_t(k) = b(k)e^{i\omega(k)t} + c(k)e^{-i\omega(k)t}. \tag{1.4}$$

Dabei bezeichnet $\omega(k)$ die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \ni k \mapsto \omega(k) := \sqrt{\|k\|^2 + m^2} \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Wir wollen nun annehmen, daß ψ die Anfangsbedingungen

$$\psi(0,x) = f(x),\ \partial_t\psi(0,x) = p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \tag{1.6}$$

erfüllt, wobei $f, p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ sind. Dann gilt offenbar

$$\hat{f}(k) = b(k) + c(k) \text{ und } \hat{p}(k) = i\omega(k)(b(k) - c(k)) \tag{1.7}$$

und damit

$$b(k) = \frac{1}{2}(\hat{f}(k) - \frac{i}{\omega(k)}\hat{p}(k)), \quad c(k) = \frac{1}{2}(\hat{f}(k) + \frac{i}{\omega(k)}\hat{p}(k)). \tag{1.8}$$

Für alle Anfangsdaten aus (1.6) können wir damit die Lösung der Differentialgleichung (1.1) konstruieren. Dabei ist zu beachten, daß die Funktionen b und c aufgrund von Gleichung (1.8) ebenfalls Schwartzfunktionen sind. Außerdem ist die konstruierte Lösung eindeutig (im durch Formel (1.2) gegebenen Funktionenraum); denn für eine Lösung ψ mit Anfangsdaten $f = 0$ und $p = 0$ würde aus (1.8) $b = c = 0$ und damit $\psi = 0$ folgen. Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

1.1.1. Satz. *Die Klein-Gordon-Gleichung* (1.1) *besitzt für alle Anfangsdaten* $f, p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ *genau eine glatte Lösung* ψ *so daß die Funktion* $x \mapsto \psi(t,x)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *eine Schwartzfunktion ist. Diese Lösung ist durch*

$$\psi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(b(k)e^{i(\langle k,x\rangle + \omega(k)t)} + c(k)e^{i(\langle k,x\rangle - \omega(k)t)}\right) d^3k \tag{1.9}$$

gegeben, wobei $b, c \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ *gemäß Gleichung* (1.8) *durch die Anfangsdaten gegeben sind;* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ *bezeichnet das übliche Skalarprodukt im* $\mathbb{R}^3$*.*

1.1.2. Bemerkung. *Dieser Existenz- und Eindeutigkeitssatz kann unter bedeutend allgemeineren Bedingungen bewiesen werden. Es ist ausreichend, wenn die Anfangsdaten einer geeigneten Sobolevklasse angehören. Eine ausführliche Diskussion dieser Tatsache im Rahmen unendlichdimensionaler Hamiltonscher Systeme findet sich z.B. im Buch von Chernov und Marsden [CM74].*

Wir sind im folgenden an reellwertigen Lösungen interessiert. Das heißt $\overline{\psi(x,t)} = \psi(x,t)$ was für die Fouriertransformierte:

$$\overline{\hat{\psi}_t(k)} = \hat{\psi}_t(-k) \quad \forall k \in \mathbb{R}^3 \tag{1.10}$$

bedeutet. Mit Gleichung (1.8) erhalten wir dadurch

$$b(-k) = \overline{c(k)} \text{ und } c(-k) = \overline{b(k)} \quad \forall k \in \mathbb{R}^3. \tag{1.11}$$

Aus (1.9) folgt nun offenbar

$$\psi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} b(k) e^{i(\langle k,x\rangle + \omega(k)t)} d^3k \\ + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} c(k) e^{i(\langle k,x\rangle - \omega(k)t)} d^3k, \tag{1.12}$$

und wir können im ersten Integral die Substitution $k \mapsto -k$ vornehmen. Mit (1.11) erhalten wir somit:

$$\psi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{c(k)} e^{i(\langle -k,x\rangle + \omega(k)t)} + c(k) e^{i(\langle k,x\rangle - \omega(k)t)} \right) d^3k. \tag{1.13}$$

Mit der Funktion

$$\mathbb{R}^3 \ni k \mapsto a(k) = \sqrt{2\omega(k)} c(k) \in \mathbb{C} \tag{1.14}$$

erhalten wir also

$$\psi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a(k)} e^{-i(\langle k,x\rangle - \omega(k)t)} + a(k) e^{i(\langle k,x\rangle - \omega(k)t)} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}} \tag{1.15}$$

für $\psi(t,x)$ und

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\omega(k)} \hat{f}(k) + \frac{i}{\sqrt{\omega(k)}} \hat{p}(k) \right) \tag{1.16}$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a(k)} e^{-i\langle k,x\rangle} + a(k) e^{i\langle k,x\rangle} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}} \tag{1.17}$$

und

$$p(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a(k)} e^{-i\langle k,x\rangle} - a(k) e^{i\langle k,x\rangle} \right) \sqrt{\frac{\omega(k)}{2}} d^3k \tag{1.18}$$

für die Beziehungen zwischen $a(k)$ und den Anfangsdaten p bzw. f. (Die Einführung des Faktors $\omega^{1/2}$ ist an dieser Stelle völlig unmotiviert und auch überflüssig. Bei der Behandlung der Quantenfelder werden wir jedoch sehen, daß dieser Faktor dort von großer Wichtigkeit ist (siehe die Bemerkungen 1.3.7 und 1.3.8). Da wir Ausdrücke für die klassischen Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung erhalten wollen, die formal dieselbe Gestalt wie die Quantenfelder haben die wir später konstruieren wollen, müssen wir uns schon an dieser Stelle mit diesen $\omega^{1/2}$ Faktoren beschäftigen.) Zusammenfassend gilt also das folgende Korollar:

1.1.3. Korollar. *Sind die Anfangsdaten* f, p *in Satz 1.1.1 reellwertig, dann ist auch die Lösung* $\psi(t,x)$ *reellwertig und sie hat die Form* (1.15) *mit der in Gleichung* (1.16) *gegebenen Funktion* $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$.

1.1.4. Bemerkung (hamiltonsche Formulierung). *Wir wollen nun die klassische Hamiltonfunktion für die Klein-Gordon-Gleichung betrachten (für eine ausführliche Darstellung der hamiltonschen Formulierung linearer hyperbolischer Differentialgleichungen, sei erneut auf das Buch von Chernov und Marsden [CM74] verwiesen). Als Phasenraum dient dabei der Raum der Anfangsdaten* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. *Die Hamiltonfunktion hat dann die Form*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})\ni(f,p)\mapsto\mathfrak{H}(f,p):=\frac{1}{2}\langle p,p\rangle+\frac{1}{2}\langle(m^2-\Delta)f,f\rangle\in\mathbb{R}, \tag{1.19}$$

wobei $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *das Skalarprodukt in* $L^2(\mathbb{R}^3,d^3x)$ *bezeichnet. Um die kanonischen Bewegungsgleichungen dieser Hamiltonfunktion zu bestimmen, führen wir die partiellen Ableitungen*

$$\langle\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial f}(f,p),\xi\rangle:=\frac{d}{d\epsilon}\mathfrak{H}(f+\epsilon\xi,p)|_{\epsilon=0} \tag{1.20}$$

und

$$\langle\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial p}(f,p),\xi\rangle:=\frac{d}{d\epsilon}\mathfrak{H}(f,p+\epsilon\xi)|_{\epsilon=0} \tag{1.21}$$

ein. Im allgemeinen müssen diese partiellen Ableitungen natürlich nicht existieren, in unserem Falle jedoch erhalten wir

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial f}(f,p)=(m^2-\Delta)f \text{ und } \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial p}(f,p)=p \tag{1.22}$$

und somit für die kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{f}_t=\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial p}(f_t,p_t)=p_t \tag{1.23}$$

$$\dot{p}_t=-\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial f}(f_t,p_t)=(\Delta-m^2)f_t. \tag{1.24}$$

Ist $t\mapsto(f_t,p_t)$ *eine Lösung dieser Gleichungen, dann löst* $\psi(t,x):=f_t(x)$ *die Klein-Gordon-Gleichung und löst umgekehrt* $\psi(t,x)$ *die Klein-Gordon-Gleichung dann ist* (f_t,p_t) *mit* $f_t=\psi(t,\cdot)$ *und* $p_t=\partial_t\psi(t,\cdot)$ *eine Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen. Dies zeigt, daß die klassische Hamiltonfunktion* $\mathfrak{H}$ *in der Tat die Klein-Gordon-Gleichung beschreibt.*

Wir wollen nun noch untersuchen, welche Gestalt $\mathfrak{H}$ *als Funktion von* $a\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ *hat. Wir benutzen hierfür die Unitarität der Fouriertransformation. Das heißt wir berechnen* $\langle\hat{p},\hat{p}\rangle=\langle p,p\rangle$ *und* $\langle\omega^2\hat{f},\hat{f}\rangle=\langle(m^2-\Delta)f,f\rangle$. *Für die Fouriertransformierten von* f *und* p *aus (1.7) und (1.14) erhalten wir*

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}}(\overline{a(-k)}+a(k)) \text{ und } \hat{p}(k)=i\sqrt{\frac{\omega(k)}{2}}(\overline{a(-k)}-a(k)). \tag{1.25}$$

Dies liefert somit

$$\langle(m^2-\Delta)f,f\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\omega(k)}{2}\overline{\left(\overline{a(-k)}+a(k)\right)}\left(\overline{a(-k)}+a(k)\right)d^3k \tag{1.26}$$

und

$$\langle p,p\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(k)}{2}\overline{\left(\overline{a(-k)} - a(k)\right)}\left(\overline{a(-k)} - a(k)\right) d^3k. \tag{1.27}$$

Zusammen also

$$\mathfrak{H}(a) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \omega(k)\left(\overline{a(-k)}a(-k) + a(k)\overline{a(k)}\right) d^3k \tag{1.28}$$

und wenn wir, ähnlich wie oben, das Integral in eine Summe von zwei Integralen zerlegen und im ersten Integral die Substitution $k \mapsto -k$ *vornehmen, dann folgt:*

$$\mathfrak{H}(a) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \omega(k)\left(\overline{a(k)}a(k) + a(k)\overline{a(k)}\right) d^3k = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k)\overline{a(k)}a(k)d^3k. \tag{1.29}$$

Unser nächstes Ziel ist nun die „Quantisierung“ dieser klassischen Feldtheorie, das heißt wir wollen die klassischen Lösungen $\psi(t,x)$ der Klein-Gordon-Gleichung durch „operatorwertige Felder“ $\Phi(t,x)$ zu ersetzen. Genauer gesagt wir suchen einen Hilbertraum $\mathfrak{F}$ und eine Abbildung $\mathbb{R}^4 \ni (t,x) \mapsto \Phi(t,x)$ die jedem Ereignis (t,x) des Minkowskiraumes $\mathbb{R}^4$ einen selbstadjungierten Operator $\Phi(t,x)$ so zuordnet, daß (in einem geeigneten Sinne) die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt ist. (Wir werden sehen, daß unter den zusätzlichen Bedingungen die an dieses Modell zu stellen sind, dieser Wunsch nicht ganz erfüllt werden kann. Wir werden die $\Phi(t,x)$ nicht als Operatoren sondern nur als quadratische Formen definieren können.)

Allein die Forderung $\Phi(t,x)$ solle eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung sein reicht allerdings bei weitem nicht aus, um die quantisierte Theorie eindeutig festzulegen. In Analogie zum klassischen Fall könnte man sagen, daß die „Anfangsdaten“ $\phi(x) = \Phi(0,x)$ und $\pi(x) = \partial_t\Phi(0,x)$ durch geeignete Bedingungen festgelegt werden müssen. Der wichtigste Anhaltspunkt hierfür ist die Forderung, daß die Theorie „kanonisch“ quantisiert werden soll. Für eine Theorie mit endlich vielen Freiheitsgraden heißt dies, daß die klassischen Orts- und Impulskoordinaten q_i, p_j durch Operatoren Q_i, P_j zu ersetzen sind, so daß die kanonischen Vertauschungsrelationen $[Q_i,Q_j] = [P_i,P_j] = 0$ und $[Q_i,P_j] = i\delta_{i,j}$ gelten. Übertragen auf eine Feldtheorie bedeutet dies, für die operatorwertigen Felder $\phi(x), \pi(x)$:

$$[\phi(x),\pi(y)] = i\delta(x-y),\ [\phi(x),\phi(y)] = 0,\ [\pi(x),\pi(y)] = 0, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^3. \tag{1.30}$$

Ich möchte allerdings schon an dieser Stelle bemerken, daß diese Forderung die Quantisierung *nicht* eindeutig festlegt; selbst wenn man die Probleme außer acht läßt, die von der Nichtäquivalenz der Weylschen und der Heisenbergschen Form der Vertauschungsrelationen herrühren (siehe [RS80, VIII.5] für eine Diskussion der Probleme der kanonischen Vertauschungsrelationen schon für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden). Wir werden im 4. Kapitel sehen, daß es bei einer Feldtheorie beliebig viele *inäquivalente* Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen gibt und wir zusätzliche Bedingungen benötigen, um die Quantisierung eindeutig zu machen (Dieser Umstand ist übrigens ein wesentlicher Grund, weshalb algebraische Methoden bei der Behandlung von Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden besonders nützlich sind; wir werden dies im Verlauf dieses Kapitels noch eingehender diskutieren). Eine dieser Forderungen (aber ebenfalls nicht ausreichend) ist die nach „Poincaréinvarianz“, das heißt bei dem Wechsel des Inertialsystems durch eine Poincarétransformation (Λ, ν) (Λ beschreibt dabei eine Lorentztransformation und $\nu \in \mathbb{R}^4$ eine Raumzeittranslation) soll sich das Feld durch eine geeignete unitäre Darstellung $U_{\Lambda,\nu}$ der Poincarégruppe transformieren: $U_{\Lambda,\nu}\Phi(t,x)U^*_{\Lambda,\nu} = \Phi(\Lambda(t,x)+\nu)$.

Um dies zu erreichen, werden wir in den nächsten zwei Abschnitten ein operatorwertiges Feld $k \mapsto A(k)$ (den „Vernichtungsoperator“) suchen, so daß $\phi(x)$, und $\pi(x)$ die Form

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(A(k)^* e^{-i\langle k,x\rangle} + A(k) e^{i\langle k,x\rangle}\right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}} \tag{1.31}$$

und

$$\pi(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(A(k)^* e^{-i\langle k,x\rangle} - A(k) e^{i\langle k,x\rangle}\right) \sqrt{\frac{\omega(k)}{2}} d^3k \tag{1.32}$$

(vergl. Formel (1.17) und (1.18)) haben. Die in (1.30) angegebenen kanonischen Vertauschungsrelationen legen dabei die Möglichkeiten für die Wahl der Operatoren $A(k)$ bis zu einem gewissen Grade fest (aber nicht vollständig, wie bereits erwähnt). Das freie, skalare Quantenfeld $\Phi(t,x)$ ist dann wie in (1.15) ebenfalls durch die Operatoren $A(k)$ gegeben:

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(A(k)^* e^{-i(\langle k,x\rangle - \omega(k)t)} + A(k) e^{i(\langle k,x\rangle - \omega(k)t)}\right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}}. \tag{1.33}$$

Der in diesem Integral auftauchende $1/(\omega^{1/2})$ Faktor ist dabei ein Vorgriff auf die bereits erwähnte Poincaréinvarianz (vergleiche Bemerkung 1.3.8 für eine ausführlichere Diskussion dieses Umstandes).

Der erste Schritt um diesen zum Teil sehr heuristischen Überlegungen einen präzisen mathematischen Sinn zu geben, ist das Studium einer bestimmten Darstellung der in Gleichung (1.30) angegebenen Vertauschungsrelationen. Bevor wir dies tun, sei noch darauf hingewiesen, daß bisher *nichts* über eine physikalische Interpretation des quantisierten Systems oder der zu konstruierenden Observablen $\Phi(t,x)$ gesagt wurde. Wir werden darauf in der Bemerkung 1.3.9 zurückkommen.

1.2 Der bosonische Fockraum

Dieser Abschnitt stellt in gewisser Weise einen Vorgriff auf das 4. Kapitel dar, da wir, wie soeben bemerkt, eine bestimmte Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen diskutieren wollen. Für eine ausführlichere Diskussion mathematischer und physikalischer Hintergründe, insbesondere für eine ausführliche physikalische Motivation sei daher auf Kapitel 4 verwiesen.

Für den Rest dieses Abschnittes bezeichne $\mathcal{H}$ einen komplexen, separablen Hilbertraum, dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Tensorprodukt (siehe [RS80] Kap. II.4 für die Definition des Tensorproduktes)

$$\mathcal{H}^{(n)} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{\text{n mal}}. \tag{1.34}$$

1.2.1. Definition. *Setzen wir zusätzlich* $\mathcal{H}^{(0)} := \mathbb{C}$, *dann definiert die direkte Summe* $\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)}$ *den* Fockraum *über* $\mathcal{H}$.

1.2.2. Bemerkung. *Ist* ψ *ein Element von* $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ *dann wollen wir im Folgenden die Projektion auf den „n-Teilchensektor“* $\mathcal{H}^{(n)}$ *mit* $\psi^{(n)}$ *bezeichnen.*

1.2.3. Beispiel. *Betrachten wir zum Beispiel ein nichtrelativistisches Teilchen mit Spin 0, dann ist* $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ *und somit* $\mathcal{H}^{(n)} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3, d^3x_1 \dots d^3x_n)$, *also*

$$\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3, d^3x_1 \dots d^3x_n). \tag{1.35}$$

Das Tensorprodukt $L^2(\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3, d^3x_1 \dots d^3x_n)$ beschreibt ein System welches aus n *unterscheidbaren* Teilchen besteht, im Falle $n = 2$ etwa ein Wasserstoffatom. Wir wollen in diesem Abschnitt jedoch Systeme betrachten, die aus einer beliebigen Anzahl *nicht unterscheidbarer* Teilchen bestehen. Da wir außerdem an Teilchen interessiert sind, die der Bosestatistik genügen, benötigen wir symmetrische Tensorprodukte.

1.2.4. Behauptung. *Sei* $\mathcal{P}_n$ *die Permutationsgruppe für* n *Elemente und* $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Basis von* $\mathcal{H}$. *Dann ist für jedes* $\sigma \in \mathcal{P}_n$ *durch*

$$\sigma(\phi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{k_n}) := \phi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \phi_{k_{\sigma(n)}} \tag{1.36}$$

ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}^{(n)}$ *(mit Norm 1) definiert. Daher ist durch* $S_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \sigma$ *ein orthogonaler Projektor (d.h.* $S_n^* = S_n$ *und* $S_n^2 = S_n$*) gegeben.*

Beweis: Der Beweis ist einfach und bleibt daher dem Leser überlassen. □

Wir definieren nun den symmetrischen bzw. den bosonischen Fockraum.

1.2.5. Definition. *Die direkte Summe* $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \mathcal{H}^{(n)}$ *heißt der* bosonische Fockraum *über* $\mathcal{H}$.

1. *Er ist offenbar ein abgeschlossener Teilraum von* $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. *Den zugehörigen Projektionsoperator wollen wir mit* $S := \sum_{n=0}^{\infty} S_n$ *bezeichnen.*

2. *Der (dichte) Teilraum*

$$\mathcal{F}_S(\mathcal{H}) \supset F_0 := \{\psi \in \mathcal{F}_S(\mathcal{H}) \,|\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \psi^{(n)} = 0\ \forall n > n_0\} \tag{1.37}$$

   heißt der Raum der endlichen Teilchenvektoren

3. *und das Element* $\Omega_0 = (1, 0, 0, \dots)$ *heißt das* Vakuum.

1.2.6. Beispiel. *Betrachten wir erneut den Hilbertraum* $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ *dann ist* $S_n\mathcal{H}^{(n)} = L^2_S(\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3, d^3x_1 \dots d^3x_n)$, *also derjenige Teilraum von* $L^2(\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3, d^3x_1 \dots d^3x_n)$, *der aus vollständig symmetrischen Funktionen besteht. Damit ist*

$$\mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_S(\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3, d^3x_1 \dots d^3x_n). \tag{1.38}$$

Sei nun $H : D(H) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $D(H)$, dann können wir einen Operator $d\Gamma(H)$ mit Definitionsbereich

$$D(d\Gamma(H)) := \{\psi \in F_0 \,|\, \psi^{(n)} \in \bigotimes_{k=1}^{n} D(H)\ \forall n \in \mathbb{N}\} \tag{1.39}$$

durch

$$(d\Gamma(H)\psi)^{(n)} := (H \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} + \cdots + \\ + \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes H)\psi^{(n)} \tag{1.40}$$

für alle $\psi \in D(d\Gamma(H))$ und durch $d\Gamma(H)\Omega_0 = 0$ definieren.

1.2.7. Satz. *Sei* $H : D(H) \to \mathcal{H}$ *selbstadjungiert, dann ist der in (1.40) definierte Operator* $d\Gamma(H) : D(d\Gamma(H)) \to \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ *auf dem in Gleichung (1.39) gegebenen Definitionsbereich wesentlich selbstadjungiert.* $d\Gamma(H)$ *heißt die* zweite Quantisierung *von* H. *Wir werden ihren selbstadjungierten Abschluß auch mit* $d\Gamma(H)$ *bezeichnen solange dies nicht zu Verwirrung führt.*

Beweis: Da H selbstadjungiert ist, ist der Operator

$$G_n := H \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} + \cdots + \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes H \tag{1.41}$$

auf dem Definitionsbereich $D(H) \otimes \cdots \otimes D(H)$ wesentlich selbstadjungiert [RS80, Thm. VIII.33]. Daher ist $\mathrm{Ran}(G_n \pm i\mathbb{1})$ dicht in $\mathcal{H}^{(n)}$ [RS80, Thm. VIII.3] und somit ist auch $\mathrm{Ran}(d\Gamma(H) \pm i\mathbb{1}) = \mathrm{Ran}(\sum_{n=0}^{\infty} G_n \pm i\mathbb{1})$ dicht in $\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$. Dies aber impliziert, daß $d\Gamma(H)$ auf seinem Definitionsbereich wesentlich selbstadjungiert ist, was zu beweisen war. □

Betrachten wir nun die einparametrige unitäre Gruppe $U_t = \exp(itH)$ die der selbstadjungierte Operator H auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ erzeugt. Sie steht mit der durch $d\Gamma(H)$ erzeugten Gruppe wie folgt in Beziehung:

1.2.8. Satz. *Für jeden unitären Operator* U *auf* $\mathcal{H}$ *ist die* zweite Quantisierung *der durch*

$$(\Gamma(U)\psi)^{(n)} = U \otimes \cdots \otimes U\psi^{(n)}, \quad \forall \psi \in \mathcal{F}_S(\mathcal{H}) \tag{1.42}$$

und $\Gamma(U)\Omega_0 = \Omega_0$ *definierte unitäre Operator* $\Gamma(U) : \mathcal{F}_S(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$. *Ist* $H : D(H) \to \mathcal{H}$ *ein selbstadjungierter Operator, dann gilt für die durch* $d\Gamma(H)$ *erzeugte einparametrige, unitäre Gruppe* $\exp(it d\Gamma(H)) = \Gamma(U_t)$ *mit* $U_t := \exp(itH)$.

Beweis: Die Unitarität von $\Gamma(U)$ ist trivial, wir wenden uns daher gleich der zweiten Aussage zu. Sei hierfür $\psi_1 \in D(H)$ dann gilt aufgrund des Satzes von Stone [RS80, Thm. VIII.8] $\partial/\partial_t U_t\psi_1|_{t=0} = iH\psi_1$. Mit der Produktregel und mit $\psi_k \in D(H)$, $k = 1, \ldots, n$ erhalten wir daher $\partial/\partial_t U_t \otimes \cdots \otimes U_t\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n = iG_n\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n$. Für alle $\psi \in D(d\Gamma(H))$ impliziert dies $\partial/\partial_t\Gamma(U_t)\psi = i d\Gamma(H)\psi$. Da $d\Gamma(H)$ auf seinem Definitionsbereich wesentlich selbstadjungiert ist, folgt somit die Behauptung. □

1.2.9. Beispiel. *Betrachten wir zum Beispiel ein nichtrelativistisches, freies Teilchen der Masse* m. *Seine Dynamik wird durch den (wesentlich selbstadjungierten) Hamiltonoperator* $H := \frac{1}{2m}\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ *bzw. durch die zugehörige unitäre Gruppe* $U_t := \exp(it\frac{1}{2m}\Delta)$ *beschrieben. Die Dynamik einer beliebigen Anzahl solcher Teilchen, die nicht untereinander wechselwirken, ist daher durch die zweiten Quantisierungen* $d\Gamma(\frac{1}{2m}\Delta)$ *bzw.* $\Gamma(U_t)$ *gegeben.*

1.2.10. Beispiel (Teilchenzahloperator). *Die zweite Quantisierung* $N := d\Gamma(\mathbb{1})$ *des Einheitsoperators auf* $\mathcal{H}$ *hat für alle* $\psi \in \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ *die Eigenschaft* $(N\psi)^{(n)} = n\psi^{(n)}$. *Er heißt der* Teilchenzahloperator. *Insbesondere hat er die Eigenschaft* $N\Omega_0 = 0$. *Das heißt* Ω_0 *ist der einzige Zustand „ohne Teilchen“, was den Namen „Vakuum“ rechtfertigt. Hierbei ist zu beachten, daß es sich zunächst um eine rein mathematische Definition und noch nicht um einen physikalischen Teilchenbegriff handelt.*

Wir kommen nun zu den „Operatoren“ $A(k)$ und $A(k)^*$ vom Ende des vorherigen Abschnittes zurück und definieren zunächst für alle $f \in \mathcal{H}$ und $\psi_1, \dots \psi_n \in \mathcal{H}$:

$$b^-(f)\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n = \langle f, \psi_1\rangle \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_n. \tag{1.43}$$

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ bezeichnet hier das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$. $b^-(f)$ kann auf endliche Linearkombinationen der $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ fortgesetzt werden und wegen

$$\|b^-(f)\eta\| \leq \|f\|\|\eta\| \tag{1.44}$$

zu einem beschränkten Operator auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Für den zu $b^-(f)$ adjungierten Operator $b^-(f)^* =: b^+(f)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \chi_2 \otimes \cdots \otimes \chi_n, b^-(f)\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n\rangle = & \\
&= \langle f, \psi_1\rangle\langle \chi_2 \otimes \cdots \otimes \chi_n, \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_n\rangle && (1.45)\\
&= \langle f, \psi_1\rangle\langle \chi_2, \psi_2\rangle \ldots \langle \chi_n, \psi_n\rangle && (1.46)\\
&= \langle f \otimes \chi_2 \otimes \cdots \otimes \chi_n, \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n\rangle && (1.47)\\
&= \langle b^+(f)\chi_2 \otimes \cdots \otimes \chi_n, \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n\rangle. && (1.48)
\end{aligned}$$

Zusammen mit dem Teilchenzahloperator N aus Beispiel 1.2.10 erhalten wir nun den Operator

$$A(f) := \sqrt{N+1}\, b^-(f) \tag{1.49}$$

dessen Definitionsbereich $F_0 \subset \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ ist. Der adjungierte Operator hat die Form

$$\langle \sqrt{N+1}\, b^-(f)\psi, \eta\rangle = \langle \psi, S b^+(f)\sqrt{N+1}\,\eta\rangle, \tag{1.50}$$

wobei $S : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ die Projektion aus Definition 1.2.5 ist. Also

$$A(f)^* \restriction F_0 = S b^+(f)\sqrt{N+1}. \tag{1.51}$$

Wir definieren nun

1.2.11. Definition. *Der in Gleichung (1.49) definierte Operator* $A(f) : F_0 \to \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ *heißt* Vernichtungsoperator. *Sein in Gleichung (1.51) gegebener Adjungierter* $A(f)^*$ *heißt* Erzeugungsoperator. *Beide Operatoren sind abschließbar und ihr Abschluß wird im folgenden ebenfalls mit* $A(f)$*, bzw.* $A(f)^*$ *bezeichnet.*

Die Vernichtungsoperatoren $A(f)$ bieten eine alternative Möglichkeit, das Vakuum Ω_0 zu charakterisieren. Es ist nämlich leicht nachzuprüfen, daß Ω_0 das einzige Element des symmetrischen Fockraumes ist, welches von allen $A(f)$ „anniliert" wird, also die Bedingung $A(f)\Omega_0 = 0$ erfüllt.

1.2.12. Beispiel. *Wir betrachten wieder den Fall* $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$*, dann gilt für* $\psi \in \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3x))$*:*

$$(A(f)\psi)^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(x)} \psi^{(n+1)}(x, x_1, \ldots, x_n) d^3x \tag{1.52}$$

und

$$(A(f)^*\psi)^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \psi^{(n-1)}(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n). \tag{1.53}$$

Um nun wie am Ende des Abschnitts 1.1 skizziert den kanonischen Feldoperator ϕ und seinen kanonisch konjugierten Impulsoperator π zu definieren benötigen wir den wie folgt definierten Segaloperator:

1.2.13. Definition. *Auf dem Raum* $F_0 \subset \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ *ist für jedes* $f \in \mathcal{H}$ *durch*

$$\Phi_S(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(A(f) + A(f)^*) \tag{1.54}$$

der Segaloperator *definiert.*

Der folgende Satz fäßt die wichtigsten Eigenschaften des Segaloperators zusammen (siehe [RS75, Thm. X.41]):

1.2.14. Satz. *Der soeben definierte Segaloperator* $\Phi_S(f) : F_0 \to \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ *hat für jedes* $f \in \mathcal{H}$ *die folgenden Eigenschaften:*

1. *Er ist wesentlich selbstadjungiert. Wir werden seinen selbstadjungierten Abschluß ebenfalls mit* $\Phi_S(f)$ *bezeichnen.*

2. *Für alle* $\psi \in F_0$ *und für alle* $f, g \in \mathcal{H}$ *gilt*

$$[\Phi_S(f), \Phi_S(g)]\psi = i \operatorname{Im}\langle f, g\rangle \psi. \tag{1.55}$$

3. *Für jeden unitären Operator* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *gilt* $\Gamma(U)D(\overline{\Phi_S(f)}) = D(\overline{\Phi_S(Uf)})$ *und für alle* $\psi \in D(\overline{\Phi_S(Uf)})$

$$\Gamma(U)\overline{\Phi_S(f)}\Gamma(U)^{-1}\psi = \overline{\Phi_S(Uf)}\psi. \tag{1.56}$$

Beweis: Zu 1. Offenbar ist $\Phi_S(f)F_0 \subset F_0$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Daher gilt $\psi \in C^\infty(\Phi_S(f))$ für alle $\psi \in \mathcal{H}^{(n)}$ (mit $C^\infty(\Phi_S(f)) := \bigcap_{n=1}^\infty D(\Phi_S(f)^n)$). Wir zeigen nun im folgenden, daß alle diese ψ analytische Vektoren sind, das heißt es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\Phi_S(f)^k\psi\|}{k!} t^k < \infty \tag{1.57}$$

für geeignete $t > 0$. Die Behauptung folgt dann aus Nelsons Satz über analytische Vektoren [RS75, Thm. X.39].

Aus der Definition von A und A^* und aus $\|b^-(f)\| = \|f\|$ (siehe Formel (1.44)) folgt

$$\|\underbrace{A^\#(f)\ldots A^\#(f)}_{\text{k mal}}\psi\| \leq \sqrt{n+1}\ldots\sqrt{n+k}\|f\|^k\|\psi\|, \tag{1.58}$$

wobei $A^\#(f)$ entweder $A(f)$ oder $A(f)^*$ repräsentiert. Da $\Phi_S(f)^k\psi$ die Summe von 2^k Termen der Form

$$\frac{1}{2^{k/2}}\underbrace{A^\#(f)\ldots A^\#(f)}_{\text{k mal}}\psi \tag{1.59}$$

ist, erhalten wir also

$$\|\Phi_S(f)^k\psi\| \leq 2^{k/2}\sqrt{(n+k)!}\|f\|^k\|\psi\|. \tag{1.60}$$

Da die Summe $\sum_{k=0}^\infty t^k 2^{k/2}((n+k)!)^{1/2}\|f\|^k/k!$ für alle t konvergiert, ist ψ ein analytischer Vektor und $\Phi_S(f)$ somit wesentlich selbstadjungiert auf F_0.

Zu 2. Der Kommutator $[\Phi_S(f), \Phi_S(g)]\psi$ ist eine Summe von Kommutatoren der Form $[A^\#, A^\#]\psi$, die wir im Folgenden alle berechnen werden. Dazu seien $\psi_k \in \mathcal{H}$, $k = 1, \ldots, n$ dann ist

$$\psi := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n} \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)} \in S_n\mathcal{H}^{(n)} \tag{1.61}$$

und daher mit den Gleichungen (1.43) und 1.49):

$$A(f)\psi = \frac{\sqrt{n}}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n} \langle f, \psi_{\sigma(1)}\rangle\psi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)}. \tag{1.62}$$

Genauso folgt mit (1.48) und (1.51)

$$A(f)^*\psi = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_{n+1}} \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n+1)}, \tag{1.63}$$

wobei $\psi_{n+1} := f$ gesetzt wurde.

Betrachten wir nun $A(f)A(g)\psi$:

$$A(f)A(g)\psi = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n} \langle g, \psi_{\sigma(1)}\rangle\langle f, \psi_{\sigma(2)}\rangle\psi_{\sigma(3)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)}. \tag{1.64}$$

Hieraus folgt offenbar $A(f)A(g)\psi = A(g)A(f)\psi$, so daß der entsprechende Kommutator verschwindet. Da $A(f)^*$ zu $A(f)$ adjungiert ist, erhalten wir ebenso $[A^*(f), A^*(g)]\psi = 0$, womit $[A(f), A^*(g)]\psi$ zu betrachten bleibt. Es ist

$$A(f)A^*(g)\psi = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_{n+1}} \langle f, \psi_{\sigma(1)}\rangle \psi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n+1)}, \tag{1.65}$$

wobei, ähnlich wie eben, $\psi_{n+1} := g$ gesetzt wurde. Der Term $A(g)^*A(f)\psi$ erfordert etwas mehr Kombinatorik. Für $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir zu diesem Zwecke $\mathcal{P}_n(k, l) := \{\sigma \in \mathcal{P}_n \mid \sigma(k) = l\}$. Damit ist

$$A(g)^*A(f)\psi = \frac{\sqrt{n}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\langle f, \psi_k\rangle \frac{1}{(n-1)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n(1,k)}\left\{\frac{\sqrt{n}}{n}\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{1}{(n-1)!}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\sum_{\kappa\in\mathcal{P}_n(k,k)} \psi_{\kappa(\sigma(2))}\otimes\cdots\otimes\psi_{\kappa(\sigma(l))}\otimes g\otimes\psi_{\kappa(\sigma(l+1))}\otimes\cdots\otimes\psi_{\kappa(\sigma(n))}\right]\right\}\right). \tag{1.66}$$

Für $\sigma \in \mathcal{P}_n(1, k)$ und $\kappa \in \mathcal{P}_n(k, k)$ ist nun offenbar $\kappa \circ \sigma \in \mathcal{P}_n(1, k)$ was für festes k und l

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n(1,k)}\sum_{\kappa\in\mathcal{P}_n(k,k)} \psi_{\kappa(\sigma(2))}\otimes\cdots\otimes\psi_{\kappa(\sigma(l))}\otimes g\otimes\psi_{\kappa(\sigma(l+1))}\otimes\cdots\otimes\psi_{\kappa(\sigma(n))} =$$
$$(n-1)!\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n(1,k)} \psi_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes\psi_{\sigma(l)}\otimes g\otimes\psi_{\sigma(l+1)}\otimes\cdots\otimes\psi_{\sigma(n)} \tag{1.67}$$

impliziert. Daher erhalten wir

$$A(g)^*A(f)\psi =$$
$$\frac{1}{n!}\sum_{k,l=1}^{n}\langle f, \psi_k\rangle\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n(1,k)} \psi_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes\psi_{\sigma(l)}\otimes g\otimes\psi_{\sigma(l+1)}\otimes\cdots\otimes\psi_{\sigma(n)}\right). \tag{1.68}$$

Vergleichen wir diese Formel mit (1.65) dann erkennen wir, daß die einzigen Summanden die in (1.65) auftauchen jedoch nicht in (1.68) die Form $\langle f, g\rangle\psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)}$ haben. Daraus folgt also

$$[A(f), A^*(g)]\psi = \langle f, g\rangle\psi \tag{1.69}$$

und mit der Definition des Segaloperators in Gleichung (1.54)

$$[\Phi_S(f), \Phi_S(g)]\psi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(A(f) + A(f)^*), \frac{1}{\sqrt{2}}(A(g) + A(g)^*)\right]\psi \tag{1.70}$$
$$= \frac{1}{2}\left([A(f), A(g)^*]\psi + [A^*(f), A(g)]\psi\right) \tag{1.71}$$
$$= \frac{1}{2}\left([A(f), A(g)^*]\psi - [A(g), A(f)^*]\psi\right) \tag{1.72}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\langle f, g\rangle - \langle g, f\rangle\right)\psi \tag{1.73}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\langle f, g\rangle - \overline{\langle f, g\rangle}\right)\psi \tag{1.74}$$
$$= i\,\mathrm{Im}\langle f, g\rangle\psi \tag{1.75}$$

was zu beweisen war.

Zu 3. Sei $\psi = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \in \mathcal{H}^{(n)}$, dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma(U)b^-(f)\Gamma(U)^{-1}\psi &= \Gamma(U)b^-(f)(U^{-1}\psi_1 \otimes \cdots \otimes U^{-1}\psi_n) &(1.76)\\ &= \langle f, U^{-1}\psi_1\rangle \Gamma(U)(U^{-1}\psi_2 \otimes \cdots \otimes U^{-1}\psi_n) &(1.77)\\ &= \langle Uf, \psi_1\rangle \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_n &(1.78)\\ &= b^-(Uf)\psi. &(1.79)\end{aligned}$$

Da endliche Linearkombinationen solcher ψ dicht in $\mathcal{H}^{(n)}$ sind und da $b^-(f)$ beschränkt ist erhalten wir somit $\Gamma(U)b^-(f)\Gamma(U)^{-1} = b^-(Uf)$. Die Operatoren N und S vertauschen jedoch mit $\Gamma(U)$ (das folgt unmittelbar aus den Definitionen von N, S und $\Gamma(U)$; siehe Beispiel 1.2.10, Behauptung 1.2.4 und Satz 1.2.8) so daß unmittelbar $\Gamma(U)A(f)\Gamma(U)^{-1} = A(Uf)$ auf dem Definitionsbereich F_0 folgt. Adjungieren wir diese Gleichung und schränken dann auf F_0 ein erhalten wir ebenso $\Gamma(U)A(f)^*\Gamma(U)^{-1} = A(Uf)^*$. Die Definition des Segaloperators impliziert dann die Behauptung (da $\Phi_S(f)$ wesentlich selbstadjungiert ist, gilt die Behauptung selbstverständlich auch für die selbstadjungierte Fortsetzung). □

1.3 Das freie skalare Feld

Wir können nun zur Diskussion von Ende des Abschnittes 1.1 zurückkehren und das quantisierte Klein-Gordon-Feld konstruieren. Wir werden zu diesem Zwecke im ganzen Abschnitt den Hilbertraum $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ und seinen symmetrischen Fockraum betrachten.

Im Gegensatz zu den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $A(f), A(f)^*$ aus dem vorhergehenden Abschnitt, die für Testfunktionen $f \in \mathcal{H}$ definiert sind, hängen die „Operatoren" $A(k)$, $A(k)^*$ in der Gleichung (1.33) von Impulsen $k \in \mathbb{R}^3$ ab. Wir definieren daher zunächst auf dem Definitionsbereich

$$D_S = \{\psi \in F_0 \,|\, \psi^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n}, \mathbb{C}) \;\forall n \in \mathbb{N}\} \tag{1.80}$$

den *Vernichtungsoperator* $A(k) : D_S \to \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3x))$:

$$(A(k)\psi)^{(n)}(k_1, \ldots, k_n) = \sqrt{n+1}\,\psi^{(n+1)}(k, k_1, \ldots, k_n). \tag{1.81}$$

Den *Erzeugungsoperator* $A(k)^*$ kann man nun jedoch nicht als Adjungierten zu $A(k)$ definieren, da eine strikte Anwendung der Definition des Adjungierten einen Operator mit Definitionsbereich $\{0\}$ (!) ergeben würde. Nur *formal* können wir daher schreiben

$$(A(k)^*\psi)^{(n)}(k_1, \ldots, k_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{n} \delta(k - k_l)\psi^{(n-1)}(k_1, \ldots, \hat{k}_l, \ldots, k_n). \tag{1.82}$$

Um $A(k)^*$ einen exakten mathematischen Sinn zu geben müssen wir *quadratische Formen* benutzen. Das heißt auf dem Definitionsbereich $D_S \times D_S$ können wir die quadratische Form

$$D_S \times D_S \ni (\psi, \eta) \mapsto A(k)[\psi, \eta] := \langle \psi, A(k)\eta\rangle \in \mathbb{C} \tag{1.83}$$

einführen und $A(k)^*$ als die zu dieser *adjungierte quadratische Form* definieren:

$$D_S \times D_S \ni (\psi,\eta) \mapsto A(k)^*[\psi,\eta] := \langle A(k)\psi,\eta\rangle \in \mathbb{C}. \tag{1.84}$$

Ist zum Beispiel $\psi = (0,\psi^{(1)},0,\dots)$ und $\eta = (0,0,\eta^{(2)},0,\dots)$ dann folgt aus (1.84)

$$A(k)^*[\psi,\eta] = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\overline{\eta^{(2)}(k_1,k)}\psi^{(1)}(k_1) + \overline{\eta^{(2)}(k,k_1)}\psi^{(1)}(k_1)\right) d^3k_1. \tag{1.85}$$

Um nun die Beziehung zwischen $A(k)$ und $A(f)$ bzw. zwischen $A(k)^*$ und $A(f)^*$ herzustellen, müssen wir die quadratischen Formen $A(k), A(k)^*$ mit einer Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ „verschmieren“. Das heißt wir betrachten die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} A(k)f(k)d^3k \text{ und } \int_{\mathbb{R}^3} A(k)^*f(k)d^3k, \tag{1.86}$$

welche „im schwachen Sinne“ zu interpretieren sind. Für $\psi,\eta \in D_S$ soll gelten:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} A(k)f(k)d^3k\right)[\psi,\eta] = \int_{\mathbb{R}^3} A(k)[\psi,\eta]f(k)d^3k \tag{1.87}$$

bzw.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} A(k)^*f(k)d^3k\right)[\psi,\eta] = \int_{\mathbb{R}^3} A(k)^*[\psi,\eta]f(k)d^3k. \tag{1.88}$$

Damit erhalten wir die folgende Aussage:

1.3.1. Behauptung. *Für jede Testfunktion* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ *gelten die Gleichungen*

$$A(f) = \int_{\mathbb{R}^3} A(k)\overline{f(k)}d^3k \tag{1.89}$$

und

$$A(f)^* = \int_{\mathbb{R}^3} A(k)^*f(k)d^3k \tag{1.90}$$

im schwachen Sinne. Dabei sind beide Seiten jeweils als quadratische Formem mit Definitionsbereich $D_S \times D_S$ *aufzufassen.*

Beweis: Die Gleichung (1.89) folgt unmittelbar durch Vergleich der Definition von $A(k)$ in Gleichung (1.81) mit dem Ausdruck für $A(f)$ in (1.52). Die Gleichung (1.90) folgt durch Bildung von Adjungierten (oder durch Vergleich des formalen Ausdrucks (1.82) mit (1.53)). □

Wir sind nun bereit die am Ende des Abschnittes 1.1 angegebenen formalen Ausdrücke wie folgt zu interpretieren:

1.3.2. Satz. *Durch die schwachen Integrale*

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(A(k)^*e^{-i\langle k,x\rangle} + A(k)e^{i\langle k,x\rangle}\right)\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}} \tag{1.91}$$

$$\pi(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(A(k)^* e^{-i\langle k,x\rangle} - A(k) e^{i\langle k,x\rangle} \right) \sqrt{\frac{\omega(k)}{2}} d^3k \tag{1.92}$$

und

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(A(k)^* e^{-i(\langle k,x\rangle - \omega(k)t)} + A(k) e^{i(\langle k,x\rangle - \omega(k)t)} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}}. \tag{1.93}$$

sind für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ *quadratische Formen mit dem Definitionsbereich* $D_S \times D_S$ *definiert. Dabei bezeichnen* $A(k)$ *und* $A(k)^*$ *für jedes* $k \in \mathbb{R}^3$ *die quadratischen Formen aus (1.83) und (1.84).* $\Phi(t,x)$ *erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung (im schwachen Sinne).*

Beweis: Aus den Definitionen von $A(k)$ und $A(k)^*$ folgt, daß für jedes $\psi,\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n},\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}^{(n)}$ die Funktionen $\mathbb{R}^3 \mapsto A(k)[\psi,\eta] \in \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^3 \mapsto A(k)^*[\psi,\eta] \in \mathbb{C}$ Schwartzfunktionen sind. Dies impliziert jedoch, daß die Integranden der zu untersuchenden Integrale schwach integrierbar sind, die Integrale also existieren. Daß $\Phi(t,x)[\psi,\eta]$ für $\phi,\eta \in D_S$ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt folgt unmittelbar aus der Diskussion der klassischen Lösungen im Abschnitt 1.1. □

Mit diesem Satz haben wir den Ausdrücken vom Ende des Abschnittes 1.1 in mathematisch zufriedenstellender Weise interpretiert. Allerdings sind $\phi(x), \pi(x)$ und $\Phi(t,x)$ keine Operatoren, sondern nur quadratische Formen. Um Operatoren zu erhalten müssen wir die Felder mit einer Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ „verschmieren" das heißt wir müssen die schwachen Integrale

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\phi(x) d^3x, \quad \pi(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\pi(x) d^3x \tag{1.94}$$

und

$$\Phi(t,f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\Phi(t,x) d^3x \tag{1.95}$$

betrachten. Mit der Aussage 1.3.1 und der Definition des Segaloperators erhalten wir

1.3.3. Satz. *Die schwachen Integrale in (1.94) und (1.95) existieren und definieren für eine reellwertige Testfunktion* f *die auf dem Definitionsbereich* D_S *wesentlich selbstadjungierten Operatoren*

$$\phi(f) = \Phi_S\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right), \quad \pi(f) = \Phi_S\left(i\sqrt{\omega}\hat{f}\right) \tag{1.96}$$

und

$$\Phi(t,f) = \Phi_S\left(\frac{e^{i\omega t}\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right). \tag{1.97}$$

Beweis: Wir betrachten nur $\phi(f)$ da die anderen Aussagen völlig analog bewiesen werden können. Per Definition ist

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\phi(x)d^3x \tag{1.98}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(A(k)^* e^{-i\langle k,x\rangle} + A(k)e^{i\langle k,x\rangle}\right)\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}}d^3x \tag{1.99}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}\left(A(k)^*\left\{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-i\langle k,x\rangle}d^3x\right\}\right. \tag{1.100}$$

$$\left. +A(k)\left\{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{i\langle k,x\rangle}d^3x\right\}\right)\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}} \tag{1.101}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}\left(A(k)^*\hat{f}(k) + A(k)\overline{\hat{f}(k)}\right)\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}} \tag{1.102}$$

beim letzten Gleichheitszeichen ist zu beachten, daß die Testfunktion reellwertig ist. Mit 1.3.1 folgt die Behauptung. □

Nun können wir die Aussagen des Satzes 1.2.14 verwenden, um zunächst zu zeigen, daß die Felder $\phi(f)$ und $\pi(f)$ den kanonischen Vertauschungsrelationen genügen.

1.3.4. Satz. *Die Felder* $\phi(f)$ *und* $\pi(f)$ *erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen, das heißt für alle* $\psi \in D_S$ *gilt:*

$$[\phi(f),\phi(g)]\psi = 0, \quad [\pi(f),\pi(g)]\psi = 0, \quad [\phi(f),\pi(g)]\psi = i\langle f,g\rangle\psi. \tag{1.103}$$

Beweis: Wir betrachten nur reellwertige Testfunktionen. Die allgemeine Aussage folgt dann durch komplex-lineares Fortsetzen (beachte, daß die Segalquantisierung $f \mapsto \Phi_S(f)$ *nicht* komplex-linear ist). Damit ist

$$[\phi(f),\phi(g)]\psi = \left[\Phi_S\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right),\Phi_S\left(\frac{\hat{g}}{\sqrt{\omega}}\right)\right]\psi \tag{1.104}$$

$$= i\,\mathrm{Im}\left\langle\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}},\frac{\hat{g}}{\sqrt{\omega}}\right\rangle\psi \tag{1.105}$$

Das Skalarprodukt auf der rechten Seite der zweiten Gleichung ist jedoch reell: Inverses Fouriertransformieren von $\hat{f}\omega^{-1/2}$ liefert

$$\frac{1}{(2\pi)^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-i\langle k,x\rangle}d^3x\frac{1}{\sqrt{\omega(k)}}e^{i\langle k,y\rangle}d^3k =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\frac{1}{\sqrt{\omega(k)}}e^{i\langle y-x,k\rangle}d^3xd^3k \tag{1.106}$$

Im konjugiert komplexen Ausdruck des zweiten Terms dreht sich jedoch nur im Exponenten von exp das Vorzeichen um. Da der Integrand in k symmetrisch ist ($\omega(k) = \omega(-k)$) kann dies durch eine Substitution $k \mapsto -k$ kompensiert werden. Also ist, wenn $\mathcal{F}^{-1}$ die inverse Fouriertransformation bezeichnet

$$\overline{\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right)} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right) \tag{1.107}$$

und damit, wie bereits gesagt, das Skalarprodukt in (1.105) rein reellwertig. Damit folgt $[\phi(f), \phi(g)]\psi = 0$ und auf genau die gleiche Weise folgt $[\pi(f), \pi(g)]\psi = 0$. Damit bleibt $[\phi(f), \pi(g)]\psi$:

$$[\phi(f), \pi(g)]\psi = \left[\Phi_S\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right), \Phi_S\left(i\sqrt{\omega}\hat{g}\right)\right]\psi \tag{1.108}$$

$$= i\,\mathrm{Im}\left(i\left\langle\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}, \sqrt{\omega}\hat{g}\right\rangle\right)\psi \tag{1.109}$$

Das Skalarprodukt auf der rechten Seite der zweiten Gleichung ist wieder reellwertig, da es jedoch im Argument von Im mit i multipliziert wird, folgt die Behauptung. □

Nun wollen wir uns dem „freien Hamiltonian" zuwenden. Hierfür definieren wir zunächst den „Einteilchenhamiltonian":

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \ni f \mapsto h_0 f := \omega f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k). \tag{1.110}$$

Es ist unschwer zu erkennen, daß h_0 auf seinem Definitionsbereich wesentlich selbstadjungiert ist und daß seine selbstadjungierte Fortsetzung die einparametrige unitäre Gruppe $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit

$$L^2(\mathbb{R}^3, d^3k) \ni f \mapsto u_t f := e^{i\omega t} f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k) \tag{1.111}$$

erzeugt. Daher ist der *freie Hamiltonian*

$$H_0 := d\Gamma(h_0) : D_S \to \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)) \tag{1.112}$$

auf seinem Definitionsbereich ebenfalls wesentlich selbstadjungiert und er erzeugt die freie Dynamik $U_t := \Gamma(u_t)$. Mit Satz 1.2.14(3) folgt daher sofort die Aussage:

1.3.5. Satz. *Der Operator 1.112 ist wesentlich selbstadjungiert und die durch seine selbstadjungierte Fortsetzung erzeugte unitäre Gruppe* $U_t = \exp(itH_0)$ *erfüllt die Gleichung:*

$$U_t \phi(f) U_t^* \psi = \Phi(t, f)\psi \tag{1.113}$$

für alle $\psi \in D_S$.

Beweis: Unmittelbare Folge von 1.2.14(3) der Gleichung (1.97) und der Tatsache, daß $U_t = \Gamma(u_t)$ den Definitionsbereich D_S invariant läßt. □

Diese Aussage rechtfertigt die Interpretation von H_0 als freier Hamiltonoperator, da er die Dynamik des Feldes $\Phi(x, t)$ beschreibt.

Damit ist die Konstruktion des freien Feldes abgeschlossen. Wir wollen jedoch noch ein paar Bemerkungen anschließen.

1.3.6. Bemerkung. *Zunächst wollen wir einen alternativen Ausdruck für den freien Hamiltonian betrachten, der uns im nächsten Abschnitt den Weg weisen wird, wie* *wir den Hamiltonoperator für ein mit klassischen Quellen wechselwirkendes Feld konstruieren können. Wir betrachten zu diesem Zwecke* $\psi, \eta \in \mathcal{H}^{(n)}$ *Dann ist*

$$\langle \eta, H_0 \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^{n} \omega(k_i) \right) \overline{\eta(k_1, \ldots, k_n)} \psi(k_1, \ldots, k_n) d^3k_1 \ldots d^3k_n. \tag{1.114}$$

Da die Funktionen ψ, η *aber in ihren Argumenten vollständig symmetrisch sind folgt daraus:*

$$\langle \eta, H_0 \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} n\omega(k) \overline{\eta(k, k_1, \ldots, k_{n-1})} \psi(k, k_1, \ldots, k_{n-1}) d^3k d^3k_1 \ldots d^3k_{n-1} \tag{1.115}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\langle \eta, A^*(k) A(k) \psi \rangle = \langle A(k)\eta, A(k)\psi \rangle \tag{1.116}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{n} \overline{\eta(k, k_1, \ldots, k_{n-1})} \tag{1.117}$$

$$\sqrt{n} \psi(k, k_1, \ldots, k_{n-1}) d^3k_1 \ldots d^3k_{n-1}. \tag{1.118}$$

Dies führt unmittelbar zu

$$\langle \eta, H_0 \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) \overline{(A(k)\eta)(k_1, \ldots, k_{n-1})} (A(k)\psi)(k_1, \ldots, k_{n-1}) d^3k_1 \ldots d^3k_{n-1} d^3k \tag{1.119}$$

also

$$\langle \eta, H_0 \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) A^*(k) A(k) [\eta, \psi] d^3k. \tag{1.120}$$

Im Sinne quadratischer Formen gilt also

$$H_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) A^*(k) A(k) d^3k. \tag{1.121}$$

Dies ist jedoch genau der Ausdruck für die klassische Hamiltonfunktion in (1.29) wenn die Funktion $a(k)$ *durch die quadratische Form* $A(k)$ *ersetzt wird.*

1.3.7. Bemerkung (Lorentzinvariante Maße). *Nun ist noch der Grund für das bisher recht unmotivierte Auftauchen der vielen* $\omega(k)^{1/2}$ *zu klären. Den Hintergrund hierfür bildet das Studium Lorentzinvarianter Maße auf der positiven 'Massenschale":*

$$M_m := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid g(p, p) = m^2, \ p_0 > 0\}, \tag{1.122}$$

wobei $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *die Minkowskimetrik* $g(v,w) := v^0w^0 - \sum_{i=1}^3 v^iw^i$ *ist. Offenbar ist* M_m *ein Orbit der* eigentlichen, orthochronen Lorentzgruppe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\uparrow := \{\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \mid \\ \Lambda \text{ linear, } g(\Lambda v, \Lambda w) = g(v,w)\ \forall v,w \in \mathbb{R}^4,\ \det\Lambda = 1,\ \Lambda_{00} > 0\}, \end{aligned} \tag{1.123}$$

das heißt für alle $p \in M_m$ *ist* $\Lambda p \in M_m$. *Dies legt den Wunsch nahe, auf* M_m *ein Maß* Ω_m *zu finden, welches invariant unter Lorentztransformationen ist, also* $\Omega_m(\Lambda\Delta) = \Omega_m(\Delta)$ *für jede meßbare Teilmenge* $\Delta \subset M_m$ *und für jedes* $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$. *Es zeigt sich, daß jedes Maß dieser Art ein Vielfaches von*

$$\Omega_m(\Delta) = \int_{j_m(\Delta)} \frac{d^3k}{\omega(k)} \tag{1.124}$$

ist. Dabei ist j_m *die durch* $M_m \ni (k^0,k^1,k^2,k^3) \mapsto (k^1,k^2,k^3) \in \mathbb{R}^3$ *gegebene Parametrisierung von* M_m *[RS75, Thm. IX.37].*

Betrachten wir nun den Hilbertraum $L^2(M_m,\Omega_m)$. *Eine unitäre Transformation von* $L^2(M_m,\Omega_m)$ *auf* $L^2(\mathbb{R}^3,d^3k)$ *ist offenbar durch*

$$L^2(M_m,\Omega_m) \ni f \mapsto J_m(f) := \frac{f \circ j_m^{-1}}{\sqrt{\omega(\cdot)}} \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k) \tag{1.125}$$

gegeben. Setzen wir dies in den Ausdruck für $\phi(f)$ *in Gleichung (1.96) ein erhalten wir:*

$$\phi(f) = \Phi_S\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right) = \Gamma(J_m)\tilde{\Phi}_S(\hat{f})\Gamma(J_m)^* \tag{1.126}$$

für reellwertige Testfunktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. *Dabei bezeichnet* $\tilde{\Phi}_S$ *den Segaloperator im Fockraum über* $L^2(M_m,\Omega_m)$. *Das heißt wir haben sozusagen im „falschen“ Hilbertraum gearbeitet und dies durch das Berücksichtigen der* $\omega(k)^{1/2}$ *Faktoren kompensiert. Warum nun der Hilbertraum* $L^2(M_m,\Omega_m)$ *für unsere Zwecke der geeignetere ist werden wir in der nächsten Bemerkung diskutieren.*

Zuvor jedoch noch ein paar Worte zum Feld $\Phi(t,x)$. *Wir haben es in Satz 1.3.3 räumlich verschmiert um einen Operator zu erhalten. Es ist jedoch auch möglich* $\Phi(t,x)$ *mit einer Funktion von* x *und* t *zu verschmieren. Um zu erkennen, was wir dann erhalten führen wir zunächst die Abbildung*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^4,\mathbb{C}) \ni f \mapsto Ef := \sqrt{2\pi}\tilde{f} \restriction M_m \in L^2(M_m,\Omega_m) \tag{1.127}$$

ein, wobei $\tilde{f}$ *eine Variante der Fouriertransformation ist:*

$$\tilde{f}(p) := \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^4} e^{ig(v,p)}f(v)d^4v. \tag{1.128}$$

Das heißt anstatt des üblichen Skalarproduktes verwenden wir die Minkowskimetrik im Exponenten. Eine Rechnung ähnlich der aus Satz 1.3.3 zeigt nun sofort daß für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$ *durch*

$$\Phi(f) := \int_{\mathbb{R}^4} \Phi(t,x)f(t,x)dtd^3x = \Gamma(J_m)\tilde{\Phi}_S(Ef)\Gamma(J_m)^{-1} \tag{1.129}$$

ein auf dem Definitionsbereich F_0 *wesentlich selbstadjungierter Operator definiert ist. Auch dies zeigt, daß* $L^2(M_m, \Omega_m)$ *offenbar der „angemessenere“ Hilbertraum ist.*

1.3.8. Bemerkung (Transformationsverhalten der Felder). *Am Ende dieses Abschnittes sollen schließlich noch ein paar Worte zur physikalischen Interpretation fallen. Wir betrachten zu diesem Zweck das Transformationsverhalten des Feldes unter Poincarétransformationen* $(\Lambda, a) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ *(Die Poincarégruppe ist das semidirekte Produkt aus Lorentzgruppe und Translationsgruppe;* Λ *ist also eine Lorentztransformation und* a *eine Translation des* $\mathbb{R}^4$*). Zu diesem Zweck betrachten wir die folgende Darstellung der Poincarégruppe auf* $L^2(M_m, \Omega_m)$*:*

$$\mathcal{P}_+^\uparrow \ni (\Lambda, a) \mapsto U_m(\Lambda, a), \quad (U_m(\Lambda, a)f)(p) = e^{ig(p,a)} f(\Lambda^{-1}p) \tag{1.130}$$

für alle $f \in L^2(M_m, \Omega_m)$*. Identifizieren wir nun durch die unitäre Transformation* J_m *aus Formel (1.125) den Fockraum* $\mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k))$ *mit* $\mathcal{F}_S(L^2(M_m, \Omega_m))$ *dann kann gezeigt werden daß*

$$\Gamma(U_m)\Phi(t, x)\Gamma(U_m) = \Phi(\Lambda(t, x) + a) \tag{1.131}$$

gilt [RS75, Thm X.42]. An dieser Stelle sehen wir, warum der Hilbertraum $L^2(M_m, \Omega_m)$ *so wichtig ist und warum also in vielen Formeln die scheinbar unmotivierten* $\omega(k)^{1/2}$ *Faktoren auftreten. Ohne diese Faktoren hätte das Feld* $\Phi(t, x)$ *nicht dieses Transformationsverhalten, welches für die physikalische Interpretation des Modells wesentlich ist. Bevor wir darauf näher eingehen sei noch bemerkt, daß das Studium des Transformationsverhaltens der Felder für die Quantenfeldtheorie von entscheidender Bedeutung ist. Wir wollen dies hier nicht vertiefen, werden jedoch beim Studium der kanonischen Vertauschungsrelationen im Kapitel 4 auf diesen Punkt zurückkommen.*

1.3.9. Bemerkung (Physikalische Interpretation). *Nach einem Postulat von Wigner werden relativistische, freie Teilchen gerade durch eine irreduzible, stark stetige, unitäre Darstellung der universellen Überlagerungsgruppe der Poincarégruppe beschrieben (Wigner motivierte dieses Postulat durch die Annahme, daß Übergangswahrscheinlichkeiten bei dem Wechsel des Inertialsystems invariant bleiben sollten). Eine Analyse dieser irreduziblen unitären Darstellungen zeigt daß sie durch zwei Parameter, Masse und Spin, charakterisiert werden können (Eine ausführliche Darstellung dieses Sachverhalts findet sich im Buch von Barut und Raczka [BR77]). Die Darstellung* U_m *ist nun, wie sich zeigen läßt irreduzibel und gehört zur Masse* m *und Spin 0. Ein normiertes* $\psi \in \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}))$ *mit* $N\psi = \psi$ *kann daher als der Zustand eines skalaren Teilchens der Masse* m *interpretiert werden. Entsprechend beschreibt dann* $N\psi = n\psi$ *den Zustand eines* n*-Teilchensystemes und* Ω_0 *den Zustand ganz ohne Teilchen, welcher zugleich der Zustand niedrigster Energie also* $H_0\Omega_0 = 0$ *ist.*

Diese Bemerkung klärt die physikalische Interpretation des Modells: es beschreibt also eine beliebige Anzahl wechselwirkungsfreier skalarer Teilchen der Masse m *(etwa* π^0 *Mesonen). Offen ist jedoch noch die Interpretation einiger der von uns konstruierten Observablen. Einfach ist dies bei den Operatoren* N *und* H_0*, sie beschreiben Teilchenanzahl und Gesamtenergie. Solch direkte Aussagen sind für* $\phi(x)$ *und* $\pi(x)$ *problematisch. Jedoch können* ϕ *und* π*, genauso wie in der Quantenmechanik Orts-*

und Impulsoperator, benutzt werden, um neue Observablen zu konstruieren. Das einfachste Beispiel hierfür, welches wir kurz skizzieren wollen, ist der freie Hamiltonian H_0*. Wir können in der klassischen Hamiltonfunktion* $\mathfrak{H}(f,p)$ *(1.19) die Anfangsdaten* f *und* p *durch die quantentheoretischen Analoga* ϕ *und* π *ersetzen. Wir erhalten dann den* formalen *Ausdruck*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\pi(x)\pi(x)d^3x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\delta_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x^j}(x)d^3x+\frac{1}{2}m^2\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x)\phi(x)d^3x. \quad (1.132)$$

Umformungen ähnlich wie in Bemerkung 1.1.4 führen dann zum ebenfalls formalen *Ausdruck:*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega(k)\left(A(k)A(k)^*+A(k)^*A(k)\right)d^3k. \quad (1.133)$$

Der in diesem Ausdruck auftauchende Term $A(k)A(k)^*$ *ist jedoch nicht definiert, auch nicht als quadratische Form, da* $\langle\psi,A(k)A(k)^*\eta\rangle = \langle A(k)^*\psi,A(k)^*\eta\rangle$ *und* $A(k)^*$ *nicht als Operator definiert ist. Aufgrund physikalischer Überlegungen (für die ich auf die Lehrbuchliteratur über Quantenfeldtheorie verweisen will, zB. [BD67]) kann (1.133) jedoch als Summe bestehend aus dem freien Hamiltonian* H_0 *und einem divergenten Term, der „unendlichen Selbstenergie des Vakuums" (etwa analog zur Nullpunktenergie des harmonischen Oszillators) aufgefaßt werden. Da nur Energiedifferenzen nicht jedoch absolute Beträge gemessen werden können, ist es legitim den Energienullpunkt neufestzulegen, also die Energie zu „renormieren". Das Auftauchen der divergenten Nullpunktsenergie können wir also grob gesagt als schlechte Wahl des Energienullpunktes interpretieren und den entsprechenden Term subtrahieren. Wir gelangen dann zum „renormierten Hamiltonian"* H_0*, den wir gleich von Anfang an als den „richtigen" Hamiltonoperator interpretiert haben.*

Um (1.133) zu renormieren, haben wir also den undefinierten Ausdruck $A(k)A(k)^*$ *durch die quadratische Form* $A(k)^*A(k)$ *zu ersetzen. Diese Idee führt zur Einführung der Wickordnung, die wie folgt definiert werden kann. Gegeben sei ein Polynom* $P(A(k),A(k)^*)$ *in Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren (z.B. ein Potenz von* $\phi(x)$*), dann ist das* normalgeordnete *Polynom* $:P(A(k),A(k)^*):$ *definiert als diejenige quadratische Form die entsteht, wenn jedes Monom von* $P(A(k),A(k)^*)$ *so umgeordnet wird, daß alle Erzeuger* $A(k)^*$ *links von allen Vernichtern stehen. Mit diesem Begriff können wir nun den freien Hamiltonian auch durch*

$$H_0 =: \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\pi(x)\pi(x)+\delta_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x^j}(x)d^3x+m^2\phi(x)\phi(x)\right)d^3x: \quad (1.134)$$

angeben. Diese Methode läßt sich nun auf andere Observablen übertragen. Zum Beispiel auf den Gesamtimpuls oder den Energie-Impuls-Tensor.

1.4 Wechselwirkung mit klassischen Quellen

Wir wollen nun einen Schritt weiter gehen und Quantenfelder betrachten die mit klassischen Quelltermen „wechselwirken". Das heißt wir suchen nach Lösungen der Feldgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,x)-\Delta\psi(t,x)+m^2\psi(t,x)+\rho(x)=0, \quad (1.135)$$

wobei ρ eine geeignete, möglicher Weise singuläre Inhomogenität ist. Physikalisch beschreibt ein solches Modell Mesonen deren Wechselwirkung durch den klassischen Quellterm ρ approximiert wird. Besonders interessiert uns der singuläre Quellterm $\rho = \delta$. Dieser Fall kann als (sehr einfaches) Modell der starken Wechselwirkung aufgefaßt werden: Es beschreibt den Einfluß der Nukleonen (die hier nur durch die Quellverteilung $\rho = \delta$ eingehen) auf das Mesonenfeld. Der erste Schritt zur Konstruktion einer solchen Theorie ist die Approximation von δ durch glatte Quellterme. Für den Rest dieses Abschnittes wollen wir daher $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ betrachten, um dann im nächsten Abschnitt den Grenzübergang $\rho \to \delta$ durchzuführen. Bevor wir mit der mathematischen Analyse dieses Problems beginnen sei noch bemerkt, daß bei diesen Modellen eigentlich nicht von „Wechselwirkung“ geredet werden kann, da der Quellterm ρ zwar Auswirkungen auf die Quantenfelder hat, umgekehrt die Quantenfelder jedoch nicht auf die Quelle zurückwirken.

Um nun ein solches Modell zu konstruieren suchen wir als erstes nach einen Ansatz für den Wechselwirkungshamiltonian H. Es sollte sich dabei um einen selbstadjungierten Operator auf dem Fockraum $\mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3x))$ handeln. Die „wechselwirkenden“ Felder erhalten wir dann durch

$$e^{itH}\tilde{\phi}(x)e^{-itH} =: \tilde{\Phi}(t, x) \tag{1.136}$$

wobei $\tilde{\phi}(x)$ eine quadratische Form ähnlich der aus (1.91) ist. Um einen Ansatz für H zu erhalten orientieren wir uns an der Form (1.121) des freien Hamiltonian. Diese entsprach in ihrer Gestalt der klassischen Hamiltonfunktion $\mathfrak{H}(a)$ (siehe (1.29). Der Diskussion aus 1.1.4 folgend erhalten wir als Hamiltonfunktion für die Feldgleichung (1.135) den Ausdruck

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ni (f, p) \mapsto \mathfrak{H}(f, p) + \langle f, \rho \rangle \tag{1.137}$$

wobei $\mathfrak{H}(f, p)$ die Hamiltonfunktion des freien Feldes aus (1.19) ist. Ersetzen wir die Anfangsdaten f, p durch die Funktion $a(k)$ dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_W(a) := \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k)\overline{a(k)}a(k)d^3k &+ \\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) \int_{\mathbb{R}^3} &\left(\overline{a(k)}e^{-i\langle k,x\rangle} + a(k)e^{i\langle k,x\rangle}\right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}} d^3x. \end{aligned} \tag{1.138}$$

Wenn wir in diesem Ausdruck formal $a(k)$ durch $A(k)$ und $\overline{a(k)}$ durch $A(k)^*$ ersetzen erhalten wir den Operator (siehe hierzu auch die Diskussion der Wickordnung in Bemerkung 1.3.9)

$$H := H_0 + \phi(\rho) : D_S \to \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)) \tag{1.139}$$

der auf seinem Definitionsbereich symmetrisch ist. Eine ausführliche Analyse von Operatoren dieser Gestalt wurde von Cook 1961 durchgeführt [Coo61]. Wir wollen für alle Beweise in diesem Abschnitt auf diese Arbeit verweisen (siehe auch den entsprechenden Abschnitt im Buch von Emch [Emc72]). Als erstes gilt

1.4.1. Satz. *Der Operator H aus Gleichung (1.139) ist auf dem Definitionsbereich $D(\overline{H_0})$ selbstadjungiert. Außerdem ist H wesentlich selbstadjungiert auf jedem Core von H_0.*

Beweis: Der Beweis einer verallgemeinerten Version dieser Aussage findet sich in [Coo61, Lemma 2]. Wir wollen für den Beweis das folgende Theorem von Kato und Rellich verwenden [RS75, Thm. X.12]:

A und B seien dicht definierte Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ so daß 1. $D(A) \subset D(B)$ ist, 2. mit $\mathbb{R} \ni a < 1$ und $b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\|B\psi\| \leq a\|A\psi\| + b\|\psi\|$ für alle $\psi \in D(A)$ erfüllt ist (d.h. B ist A-*beschränkt* mit *relativer Schranke* a) und 3. A selbstadjungiert und B symmetrisch ist, dann ist $A + B$ auf $D(A)$ selbstadjungiert. Außerdem ist $A + B$ wesentlich selbstadjungiert auf jedem Core von A.

Wir wollen dieses Theorem auf $A = H_0$ und $B = \phi(\rho)$ anwenden. Dafür müssen wir als erstes zeigen, daß $\phi(\rho)$ auf dem Definitionsbereich von H_0 als symmetrischer Operator definiert ist. Hierbei ist zu bedenken, daß H_0 hier als selbstadjungierte Fortsetzung des auf D_S definierten Operators $d\Gamma(h_0)$ aufzufasssen ist. Das heißt $D(H_0) \supset D_S$. Der Operator $\phi(\rho)$ dagegen ist die selbstadjungierte Fortsetzung des Segaloperators $\Phi_S(\hat{\rho}/\omega^{1/2})$, dessen Definitionsbereich F_0 ist.

Aufgrund der Definition des Segaloperators reicht es zu zeigen, daß $A(\tilde{\rho})$ und $A(\tilde{\rho})^*$ (mit $\tilde{\rho} := \hat{\rho}/\omega^{1/2}$) auf $D(H_0)$ definiert sind. Betrachten wir zunächst $A(\tilde{\rho})$. Mit (1.49) folgt für $\psi \in D(A(\tilde{\rho}))$:

$$\|A(\tilde{\rho})\psi\|^2 = \langle (N+1) b^-(\tilde{\rho})\psi, b^-(\tilde{\rho})\psi\rangle = \tag{1.140}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \langle b^-(\tilde{\rho})\psi^{(n)}, b^-(\tilde{\rho})\psi^{(n)}\rangle \leq \tag{1.141}$$

$$\leq \|\tilde{\rho}\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} n \langle \psi^{(n)}, \psi^{(n)}\rangle. \tag{1.142}$$

Das heißt wir müssen zeigen, daß für alle $\psi \in D(H_0)$ die Summe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\|\psi^{(n)}\|^2$ endlich ist. Hierfür stellen wir zunächst fest, daß der Einteilchenhamiltonian h_0 von unten durch m beschränkt ist. Das heißt für $\eta \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)$ gilt

$$\langle h_0\eta, \eta\rangle = \langle \omega\eta, \eta\rangle \geq \inf_{k\in\mathbb{R}^3} \omega(k)\|\eta\|^2 = m\|\eta\|^2. \tag{1.143}$$

Für $\psi \in D(H_0)$ ist daher

$$\|H_0\psi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|(H_0\psi)^{(n)}\|^2 \geq m^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|\psi^{(n)}\|^2. \tag{1.144}$$

Wir haben an dieser Stelle die Definition von H_0 in (1.112) und die Definition der zweiten Quantisierung selbstadjungierter Operatoren in (1.40) eingesetzt. Aus dieser Ungleichung folgt nun

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\|\psi^{(n)}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n\|\psi^{(n)}\| + \|\psi\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n^2\|\psi^{(n)}\| + \|\psi\| < \infty. \tag{1.145}$$

Damit ist $A(\tilde{\rho})\psi$ definiert. Ähnliche Argumente zeigen, daß

$$\|A(\tilde{\rho})^*\psi\|^2 \leq \|\tilde{\rho}\|^2 \langle (N+1)\psi, \psi\rangle = \|\tilde{\rho}\|^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\|\psi^{(n)}\|^2 \tag{1.146}$$

was beweist, daß auch $A(\tilde{\rho})^*\psi$ definiert ist. Daher folgt $D(H_0) \subset D(\phi(\rho))$.

Wir betrachten erneut $\|\phi(\rho)\psi\|^2$. Offenbar ist

$$\|\phi(\rho)\psi\|^2 = \frac{1}{2}\|A(\tilde{\rho})\psi + A(\tilde{\rho})^*\psi\|^2 \leq \|A(\tilde{\rho})\psi\|^2 + \|A(\tilde{\rho})^*\psi\|^2. \tag{1.147}$$

Setzen wir hier (1.142) und (1.146) ein folgt

$$\|\phi(\rho)\psi\|^2 \leq \|\tilde{\rho}\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|(2n+1)\psi^{(n)}\|^2 < \infty. \tag{1.148}$$

Dies können wir benutzen um zu zeigen, daß

$$\|\phi(\rho)\psi\|^2 \leq a^2\|H_0\psi\|^2 + b^2\|\psi\|^2 \tag{1.149}$$

mit geeigneten Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 1$ gilt. Aufgrund des oben zitierten Theorems folgt dann die Behauptung.

Aufgrund von (1.148) folgt nun die Ungleichung (1.4) offenbar aus

$$a^2m^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2\|\psi^{(n)}\|^2 + b^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 - \|\tilde{\rho}\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|(2n+1)\psi^{(n)}\|^2 \tag{1.150}$$

was für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a^2m^2n^2 - 2\|\tilde{\rho}\|^2 n + (b^2 - \|\tilde{\rho}\|^2) \geq 0 \tag{1.151}$$

impliziert. Diese Ungleichung wird aber durch alle

$$a = \frac{\|\tilde{\rho}\|^2}{\lambda m},\ b > \|\tilde{\rho}\|^2(\lambda+1) \text{ mit } \lambda > \frac{\|\tilde{\rho}\|^2}{m} \tag{1.152}$$

erfüllt, was den Satz beweist. □

Der nächste Schritt besteht in der Spektralanalyse des Hamiltonians H. Genauer gesagt, wir werden untersuchen wie das Spektrum des freien Hamiltonians H_0 und das Spektrum von H miteinander zusammenhängen. Zu diesem Zwecke führen wir mittels der Ortsdarstellung des Einteilchenhamiltonians $\widetilde{h_0} f = (h_0 \hat{f})^\vee$ den unitären Operator

$$V := e^{-i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho)} \tag{1.153}$$

ein, welcher folgendem Satz genügt.

1.4.2. Satz. *Für alle* $\psi \in D(\overline{H_0}) = D(\overline{H})$ *gilt*

$$V\overline{H}V^{-1}\psi = \overline{H}_0\psi + W\psi \textit{ mit } W := \frac{1}{2}\|\widetilde{h_0}^{-1}\rho\|^2. \tag{1.154}$$

Das heißt H *ist bis auf die additive Konstante* W *unitär äquivalent zum freien Hamiltonian.*

Beweis: Der Beweis einer Verallgemeinerung dieser Aussage findet sich wieder im Artikel von Cook [Coo61, Thm. 1]. Wir wollen hier einen kürzeren Beweis angeben. Der erste Schritt ist die Suche nach einem gemeinsamen Core für die Operatoren H_0 und H. Gemäß Satz 1.4.1 reicht es hierfür einen Core von H_0 zu finden. Wir führen daher für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)$ die *Exponentialvektoren*

$$e(f) := \sum_{n=0}^{\infty} f^{\otimes^n} \text{ mit } f^{\otimes^n} := \begin{cases} \bigotimes_{k=1}^n f & \text{für } n > 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases} \tag{1.155}$$

ein [Par92, Kapitel 19]. Die unitären Operatoren $U_t = \exp(itH_0)$ wirken nun auf diese Exponentialvektoren durch [Par92, Kapitel 20]

$$U_t e(f) = e(e^{ith_0} f) = e(e^{it\omega} f) \tag{1.156}$$

Daher wird der lineare Teilraum

$$\mathcal{E}_S := \operatorname{span}\{e(f) \,|\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})\} \tag{1.157}$$

von $\mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k))$ durch U_t auf sich abgebildet. $\mathcal{E}_S$ ist jedoch zugleich ein dichter Teilraum [Par92, Kor. 19.5] von $\mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k))$. Daher folgt aus [RS80, Thm. VIII.11], daß $\mathcal{E}_S$ ein Core für H_0 ist und somit ist, wie bereits gesagt, H auf $\mathcal{E}_S$ ebenfalls wesentlich selbstadjungiert. Dies impliziert, daß wir Gleichung (1.154) nur für alle $\psi \in \mathcal{E}_S$ beweisen müssen.

Die Strategie des Beweises ist es, V und V^{-1} durch Potenzreihen zu ersetzen. Da $\pi(\widetilde{h_0\rho})$ jedoch ein *unbeschränkter* Operator ist, sind V und V^{-1} nur *formal* durch solche Potenzreihen definiert. (Formale Rechnungen dieser Art sind sehr gefährlich! Vergleiche hierzu die Gegenbeispiele von Nelson [RS80, VIII.5].) Wir betrachten daher die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ni (z_1, z_2, s) \mapsto \\ &\qquad Y(z_1, z_2, s) := V(-z_1) e^{isH_0} V(z_2) e(f) \in \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)), \end{aligned} \tag{1.158}$$

wobei $V(z)\psi := \exp(-i\pi(z\widetilde{h_0^{-2}}\rho))\psi$ ist. Mit [Par92, Kap. 20] und wegen $H_0 = d\Gamma(h_0)$ folgt nun

$$Y(z_1, z_2, s) = C(s, z_1, z_2) e(e^{ish_0}(f + z_1 \widetilde{h_0^{-2}}\rho) - z_2 \widetilde{h_0^{-2}}\rho) \in \mathcal{E}_S, \tag{1.159}$$

mit

$$\begin{aligned} &C(s, z_1, z_2) = \\ &\exp\left(-\frac{1}{2}\|z_2\widetilde{h_0^{-2}}\rho\|^2 - \frac{1}{2}\|z_1\widetilde{h_0^{-2}}\rho\|^2 + \langle \widetilde{h_0^{-2}}\rho, e^{ish_0}(f + z_1\widetilde{h_0^{-2}}\rho) - f\rangle\right). \end{aligned} \tag{1.160}$$

Für jedes $\psi \in \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k))$ ist daher die Abbildung

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ni (z_1, z_2, s) \mapsto \langle Y(z_1, z_2, s), \psi \rangle \in \mathbb{C} \tag{1.161}$$

stetig differenzierbar in s und analytisch in z_1, z_2 [Par92, Prop. 20.2, 20.3]. Aus der Definition analytischer Abbildungen folgt nun jedoch, daß auch

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z_1, z_2) \mapsto \frac{d}{ds}\langle Y(z_1, z_2, s), \psi\rangle|_{s=0} = -i\langle V(-z_1)H_0V(z_2)e(f), \psi\rangle \quad (1.162)$$

für alle $\psi \in \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k))$ analytisch ist. Dies bedeutet jedoch per Definition die *schwache* Analytizität von

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z_1, z_2) \mapsto X(z_1, z_2) := V(-z_1)H_0V(z_2)e(f) \quad (1.163)$$

und wegen [RS80, VI.4] auch die *starke* Analytizität. Daher [HP57, Thm 3.11.4, Thm 3.15.1] existiert die Taylorentwicklung

$$\sum_{n=0,l=0}^{\infty} \frac{1}{n!l!} \frac{\partial^{n+l}X}{\partial z_1^n \partial z_2^l}(0,0) z_1^n z_2^l \quad (1.164)$$

als absolut konvergente (in der Normtopologie) Potenzreihe. Wir müssen also lediglich die Ableitungen der Funktion X bestimmen. Aus dem Satz von Stone [RS80, Thm. VIII.8] folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+l}X}{\partial z_1^n \partial z_2^l}(0,0) &= \frac{\partial^n}{\partial z_1^n}\frac{\partial^l}{\partial z_2^l}\frac{\partial}{\partial s} Y(z_1, z_2, s)|_{s=z_1=z_2=0} && (1.165)\\
&= \frac{\partial^n}{\partial z_1^n}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^l}{\partial z_2^l} Y(z_1, z_2, s)|_{s=z_1=z_2=0} && (1.166)\\
&= (i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho))^n H_0(-i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho))^l e(f). && (1.167)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Tatsache berücksichtigt, daß $(z_1, z_2, s) \mapsto Y(z_1, z_2, s)$ in allen Argumenten stetig differenzierbar ist, und daher die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauscht werden darf (dies gilt nicht nur im $\mathbb{R}^n$ sondern für alle stetig differenzierbaren Abbildungen zwischen Banachräumen [Die75, 8.12.3]).

Daher erhalten wir mit $\psi \in \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k))$ für die Taylorreihe aus (1.164):

$$\begin{aligned}
V^{-1}H_0V &= \sum_{n=0,l=0}^{\infty} \frac{1}{n!l!}(i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho))^n H_0(-i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho))^l\psi && (1.168)\\
&= H_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{[i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho), [i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho), \ldots [i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho)}_{n \text{ mal}}, H_0]\ldots]]\psi. && (1.169)
\end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen folgt mit vollständiger Induktion (Übungsaufgabe!). Wir berechnen nun die in der letzten Gleichung auftretenden Kommutatoren. Für $\psi \in F_0$ galt aufgrund des Satzes 1.3.5 $\exp(itH_0)\phi(f)\exp(-itH_0)\psi = \Phi(t, f)\psi$. Leiten wir beide Seiten nach t an der Stelle $t = 0$ ab, erhalten wir daher: $i[H_0, \phi(f)]\psi = \pi(f)\psi$. Nun ist jedoch $\pi(f) = \phi(i\widetilde{h_0}f)$ (siehe Satz 1.3.3) daher also

$$i[H_0, \pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho)]\psi = i[H_0, \phi(i\widetilde{h_0}^{-1}\rho)]\psi = \pi(i\widetilde{h_0}^{-1}\rho)\psi = -\phi(\rho)\psi \quad (1.170)$$

und aufgrund der kanonischen Vertauschungsrelationen (siehe Satz 1.3.4)

$$[\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho),[\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho),H_0]]\psi = -i[\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho),\phi(\rho)]\psi = \\ = \langle\widetilde{h_0}^{-2}\rho,\rho\rangle\psi = \|\widetilde{h_0}^{-1}\rho\|^2\psi. \quad (1.171)$$

Für $n > 2$ gilt offenbar:

$$\underbrace{[i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho),[i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho),\dots[i\pi(\widetilde{h_0}^{-2}\rho)}_{n\ \text{mal}},H_0]\dots]]\psi = 0. \quad (1.172)$$

Setzen wir dies in (1.169) ein, dann folgt offenbar die Behauptung. □

Dieser Satz zeigt, daß aufgrund der Wechselwirkung mit dem Quellterm ρ die Gesamtenergie des Systems gegenüber dem wechselwirkungsfreien System um eine endliche Konstante W verschoben ist. Man kann sich obendrein überlegen, daß dieser Betrag gerade durch Selbstwechselwirkungen der Quellen durch Yukawapotentiale zustande kommt (siehe [Emc72, 1.d] und die Zitate darin). Das heißt aber, daß die niedrigst mögliche Energie des Systems gerade durch die Konstante W gegeben ist. Da aber nur Energie*differenzen* und keine absoluten Beträge gemessen werden können und da die Subtraktion der Konstanten W keine Auswirkungen auf die Zeitentwicklung von Erwartungswerten hat:

$$\langle e^{it(H-W\mathbb{1})}\psi, Ae^{it(H-W\mathbb{1})}\psi\rangle = \langle e^{-itW}e^{itH}\psi, e^{-itW}Ae^{itH}\psi\rangle \quad (1.173)$$
$$= \langle e^{itH}\psi, Ae^{itH}\psi\rangle \quad (1.174)$$

können wir den Wechselwirkungshamiltonian H durch den *renormierten* Hamiltonian

$$H_\rho := H - W\mathbb{1} : D(\overline{H}) \to \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)) \quad (1.175)$$

ersetzen, der unitär äquivalent zum freien Hamiltonian ist.

Um nun das wechselwirkende Feld zu definieren, benötigen wir eine Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen, d.h. Felder $\phi_\rho(x), \pi_\rho(x)$, die mit einer Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ verschmiert

$$\phi_\rho(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\phi_\rho(x)d^3x, \quad \pi_\rho(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\pi_\rho(x)d^3x \quad (1.176)$$

abschließbare Operatoren definieren, die dieselben Kommutatorrelationen wie $\phi(f)$ und $\pi(f)$ in Satz 1.3.4 erfüllen. Die Felder $\phi(x)$ und $\pi(x)$ aus (1.92) bzw (1.93) sind nicht geeignet, da das „nackte Vakuum“ Ω_0 zwar bzgl. des Teilchenzahloperators N der einzige Zustand ohne Teilchen ist, jedoch nicht der Zustand niedrigster Energie von H_ρ ist. Obendrein ist Ω_0 nicht invariant unter der durch H_ρ gegebenen Zeitentwicklung, d.h. $\exp(itH_\rho)\Omega_0 \neq \Omega_0$. Eine bessere Wahl ist daher

$$\phi_\rho(x) = V\phi(x)V^*, \quad \pi(x)_\rho = V\pi(x)V^* \quad (1.177)$$

denn für die so gewählten $\phi_\rho(x), \pi_\rho(x)$ spielt das „physikalische Vakuum“ $\Omega_\rho := V\Omega_0$, welches offenbar der Eigenzustand von H_ρ zur niedrigsten Energie ist, dieselbe

Rolle wie Ω_0 für die $\phi(x), \pi(x)$. Um diese Aussage etwas zu präzisieren betrachten wir die Operatoren (f reellwertig)

$$A_\rho(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi((\sqrt{\omega}\hat{f})^\vee) + i\pi((\frac{1}{\sqrt{\omega}}\hat{f})^\vee) \right), \quad A_\rho(if) = -iA_\rho(f) \tag{1.178}$$

welche sich zu $\phi_\rho(x), \pi_\rho(x)$ genauso verhalten wie die Vernichtungsoperatoren $A(f)$ zu $\phi(x), \pi(x)$ (vergleiche die Ausdrücke für $\phi(f)$ und $\pi(f)$ in Satz 1.3.3 und die Definition des Segaloperators in Satz 1.2.14) Die $A_\rho(f)$ annilieren nun das physikalische Vakuum d.h. $A_\rho(f)\Omega_\rho = 0$ für alle f. Wir definieren daher das wechselwirkende Feld

$$\Phi_\rho(t, x) := e^{itH_\rho} \phi_\rho(x) e^{-itH_\rho} = V\Phi(x, t)V^* \tag{1.179}$$

welches offenbar unitär äquivalent zum freien Feld ist. Dieser Umstand deutet schon an, daß das somit konstruierte Modell aus physikalischer Sicht noch nicht besonders interessant ist. Deutlicher, wird dies wenn wir die zum Feld Φ_ρ gehörende Streutheorie untersuchen.

Zuvor wollen wir jedoch eine nützliche Beziehung der Felder $\Phi_\rho(x)$ zu den freien Φ untersuchen. Wir betrachten zu diesem Zweck die verschmierten Felder

$$\Phi_\rho(t, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_\rho(t, x) f(x) d^3x = V\Phi(t, f)V^* \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \tag{1.180}$$

und erhalten:

1.4.3. Behauptung. *Für jede Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ gilt die Beziehung*

$$\Phi_\rho(t, f) = \Phi(t, f) + \langle h_0^{-2}\hat{\rho}, e^{it\omega}\hat{f}\rangle. \tag{1.181}$$

Beweis: Dies wird auf die gleiche Weise bewiesen, wie Satz 1.4.2. Es lediglich H_0 durch $\Phi(t, f)$ zu ersetzen (natürlich müssen am Ende andere Vertauschungsrelationen benutzt werden) und zu berücksichtigen, daß $\Phi(t, f) = \phi((\exp(i\omega t)\hat{f})^\vee)$ ist. □

Wir können also die Dynamik der wechselwirkenden Felder $\Phi_\rho(t, x)$ direkt durch die Dynamik der freien Felder ausdrücken, ohne explizit den Hamiltonian H_ρ zu benutzen. Dies wird im nächsten Abschnitt sehr nützlich sein. Zuvor jedoch ein paar Worte zur Streutheorie.

1.4.4. Bemerkung (physikalische Interpretation/Streutheorie). *Die grundlegende Idee der Streutheorie*[1] *kann wie folgt skizziert werden: Wir betrachten Teilchen, deren Dynamik bei Anwesenheit eines „Streuzentrums“ durch den Wechselwirkungshamiltonian H und bei Abwesenheit des Streuzentrums durch den freien Hamiltonian H_0 beschrieben wird. In großer Entfernung vom Streuzentrum soll dabei die Wechselwirkung vernachlässigbar sein, d.h. dort kann die wechselwirkende Dynamik durch die freie Dynamik approximiert werden. Das heißt der Experimentator präpariert in der fernen Vergangenheit freie Teilchen im Zustand ψ_{in} und er registriert in*

[1] Ich habe mich mit dieser Bemerkung sehr eng an die entsprechenden Ausführungen in [Emc72] gehalten, die ein ausführlicheres Studium der Streutheorie nicht ersetzen können. Dies ist jedoch *keine* Vorlesung über Streutheorie. Eine mathematisch ausführliche Darstellung stellt der dritte Band des Buches von Reed und Simon [RS79] dar.

der fernen Zukunft ebenfalls freie Teilchen im Zustand ψ_{out}. *Die wesentlichen physikalischen Größen die dabei gemessen werden, sind Übergangswahrscheinlichkeiten* $\psi_{\mathrm{in}} \to \psi_{\mathrm{out}}$. *Um diese zu ermitteln nimmt man nun an, daß ein „intermediärer" Zustand* ψ *existiert, dessen Zeitentwicklung durch die wechselwirkende Dynamik gegeben ist und der für* $t \to \pm\infty$ *den „In-" bzw. „Out-"Zustand approximiert. Das heißt, daß für jeden Inzustand* ψ_{in} *und jeden Outzustand* ψ_{out} *ein* ψ *existiert, so daß*

$$\lim_{t\to-\infty} |\langle e^{itH_0}\psi_{\mathrm{in}}, Ae^{itH_0}\psi_{\mathrm{in}}\rangle - \langle e^{itH}\psi, Ae^{itH}\psi\rangle| = 0 \tag{1.182}$$

und

$$\lim_{t\to\infty} |\langle e^{itH_0}\psi_{\mathrm{out}}, Ae^{itH_0}\psi_{\mathrm{out}}\rangle - \langle e^{itH}\psi, Ae^{itH}\psi\rangle| = 0 \tag{1.183}$$

für alle Observablen A *erfüllt ist. Wir können somit den Zustand* ψ *durch*

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-itH}e^{itH_0}\psi_{\mathrm{in}} \tag{1.184}$$

bzw. durch

$$\lim_{t\to\infty} e^{-itH}e^{itH_0}\psi_{\mathrm{out}} \tag{1.185}$$

definieren. Dieser Limes definiert also die beiden Mølleroperatoren

$$\Omega_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{-itH}e^{itH_0} \tag{1.186}$$

(Genauer gesagt:

$$\Omega_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{-itH}e^{itH_0}P_{ac}(H_0), \tag{1.187}$$

wobei $P_{ac}(H_0)$ *die Projektion auf den absolut stetigen Teilraum von* H_0 *bezeichnet; siehe [RS79, XI.3]). Wir können sie verwenden um die eingangs erwähnten Übergangswahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, daß am Ende des Experiments der Zustand* η_{out} *gemessen wird wenn das System zu Beginn im Zustand* ψ_{in} *präpariert war:*

$$|\langle\eta,\psi\rangle|^2 = |\langle\Omega_+\eta_{\mathrm{out}}, \Omega_-\psi_{\mathrm{in}}\rangle|^2 = |\langle\eta_{\mathrm{out}}, \Omega_+^*\Omega_-\psi_{\mathrm{in}}\rangle|^2 =: |\langle\eta_{\mathrm{out}}, S\psi_{\mathrm{in}}\rangle|^2. \tag{1.188}$$

Der Operator S *dessen Matrixelemente also die gesuchten Übergangswahrscheinlichkeiten beschreiben heißt Streuoperator oder* S-Matrix. *Ihn zu bestimmen ist das wichtigste Ziel einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie.*

Kommen wir nun auf die zuvor konstruierte Quantenfeldtheorie zurück. Im Falle einer Feldtheorie wandeln wir die asymptotischen Bedingungen (1.182) und (1.183) in Bedingungen an die Felder um, die für das von uns untersuchte Modell

$$\lim_{t\to\infty} \langle\psi, \Phi_{\mathrm{in}}(t,f) - \Phi_\rho(t,f)\psi\rangle = 0 \tag{1.189}$$

und

$$\lim_{t\to\infty} \langle\psi, \Phi_{\mathrm{out}}(t,f) - \Phi_\rho(t,f)\psi\rangle = 0 \tag{1.190}$$

lauten. Die asymptotisch freien Felder $\Phi_{in}(t,f)$ *und* $\Phi_{out}(t,f)$ *stimmen in unserem Falle mit dem freien Feld* $\Phi(t,f)$ *überein. Wir erkennen dies unter Verwendung von Behauptung 1.4.3, denn (1.189) und (1.190) sind offenbar äquivalent zu*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\langle \widetilde{h_0}^{-2}\rho, (e^{it\omega}\hat{f})^\vee\rangle = 0, \tag{1.191}$$

wobei $\widetilde{h_0}f = (h_0\hat{f})^\vee$ *den Einteilchenhamiltonian in Ortsdarstellung bezeichnet (vergl. Satz 1.4.2). Im Impulsraum wird dieser Ausdruck zu*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\overline{\hat{\rho}(k)}}{\omega^2(k)}e^{it\omega(k)}\hat{f}(k)d^3k. \tag{1.192}$$

Führen wir nun zusätzlich die neuen Koordinaten

$$S^2\times(m^2,\infty)\ni(\alpha,s)\to\kappa(\alpha,s):=\sqrt{s^2-m^2}\alpha\in\mathbb{R}^3 \tag{1.193}$$

ein, führt dies zum Integral

$$\int_{S^2}\int_{m^2}^{\infty}\frac{\overline{\hat{\rho}(\kappa(\alpha,s)}}{s^2}e^{its}\hat{f}(\kappa(\alpha,s))s\sqrt{s^2-m^2}dsdV(\alpha), \tag{1.194}$$

wobei $dV(\alpha)$ *das Oberflächenelement der* S^2 *bezeichnet. Nun betrachten wir die Funktion*

$$S^2\times\mathbb{R}\ni(\alpha,s)\mapsto h(\alpha,s):=\begin{cases}\frac{\overline{\hat{\rho}(\kappa(\alpha,s)}}{s^2}\hat{f}(\kappa(\alpha,s))s\sqrt{s^2-m^2} & s>m^2\\ 0 & s<m^2.\end{cases} \tag{1.195}$$

Offenbar ist $s\mapsto h(\alpha,s)$ *für alle* $\alpha\in S^2$ *integrierbar, denn* ρ *und* f *sind Schwartzfunktionen, der Rest Polynomial beschränkt. Daher existiert die inverse Fouriertransformation*

$$\check{h}_\alpha(t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}h(\alpha,s)e^{its}ds \tag{1.196}$$

für alle $\alpha\in S^2$ *und ist aufgrund des Riemann-Lebesgue Lemmas [RS75, Thm. IX.7] eine stetige Funktion die im Unendlichen verschwindet. Da außerdem die Funktion* $S^2\times\mathbb{R}\ni(\alpha,t)\mapsto\check{h}_\alpha(t)$ *beschränkt ist (also die Funktionenschar* $\alpha\mapsto\check{h}_\alpha(t)$ *mit* t *als Scharparameter) gleichmäßig beschränkt) folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz [RS80, Thm. I.11] daß*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\sqrt{2\pi}\int_{S^2}\check{h}_\alpha(t)dV(\alpha)=\sqrt{2\pi}\int_{S^2}\lim_{t\to\pm\infty}\check{h}_\alpha(t)dV(\alpha)=0 \tag{1.197}$$

also (1.190) erfüllt ist.

Dies impliziert, daß die mit dem Quantenfeld Φ_ρ *verbundene Streutheorie trivial ist: Das asymptotisch freie In-Feld* Φ_{in} *stimmt mit dem asymptotisch freien Out-Feld* Φ_{out} *überein. Daher ist die S-Matrix die Identität. Dies bestätigt, was wir bereits weiter oben angedeutet haben: Die bisher konstruierte Theorie ist noch nicht sehr interessant, da die Streutheorie von einer Wechselwirkung nichts spürt. Dies wird sich im nächsten Abschnitt jedoch ändern.*

1.5 Das van Hove Modell

Zu Beginn des letzten Abschnittes haben wir bereits erwähnt, daß unser eigentliches Ziel der Fall $\rho = \delta$ ist. Physikalisch ist dieser Fall als primitives Modell der starken Wechselwirkung zu betrachten. Die Nukleonen treten hier nur sehr rudimentär durch den Quellterm ρ auf. Beschrieben wird daher nur der Einfluß der Nukleonen auf die Mesonen.

Die Vorgehensweise aus dem letzten Abschnitt ist nun nicht mehr anwendbar, da $H_0 + \phi(\delta)$ keine wohldefinierter Operator ist. Dieser Umstand deutet bereits an, daß der Wechselwirkungshamiltonian H_ρ im Falle $\rho = \delta$ auf dem Fockraum des freien Feldes nicht als selbstadjungierter Operator existieren kann. Wir werden dies noch genauer untersuchen, zuvor jedoch zeigen, wie die wechselwirkenden Felder Φ_δ trotz dieser Schwierigkeiten konstruiert werden können.

Zu diesem Zweck wollen wir die Dynamik des freien Feldes Φ und eines Feldes Φ_ρ, zunächst mit $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, in einem neuen Kontext formulieren. Wir betrachten daher die Algebra

$$\mathfrak{A} := \operatorname{span}\left(\{\prod_{i=1}^{n} \phi(f_i) \,|\, f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}),\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{1}\}\right) \tag{1.198}$$

die von den Feldoperatoren $\phi(f)$ erzeugt wird. $\mathfrak{A}$ ist eine „*-Algebra“: Das heißt $\mathfrak{A}$ ist ein Vektorraum, auf dem ein bilineares, assoziatives Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (A, B) \mapsto A \cdot B \in \mathfrak{A}$ und eine *-Operation $\mathfrak{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathfrak{A}$ definiert ist. Offenbar sind alle $\Phi(t, f)$ und alle $\Phi_\rho(t, f)$ Elemente dieser Algebra. Wir können daher die Abbildungen

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \alpha_t^0(A) = e^{itH_0} A e^{-itH_0} \in \mathfrak{A} \tag{1.199}$$

und

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \alpha_t^\rho(A) = e^{itH_\rho} A e^{-itH_\rho} \in \mathfrak{A} \tag{1.200}$$

definieren. α_t^0 und α_t^ρ sind *Automorphismen* der Algebra $\mathfrak{A}$: Sie sind linear und multiplikativ $\alpha_t^\rho(AB) = \alpha_t^\rho(A)\alpha_t^\rho(B)$ und vertauschen mit der *-Operation: $\alpha_t^\rho(A)^* = \alpha_t^\rho(A^*)$. Für uns sind sie deshalb interessant, weil sie die Dynamik der Felder Φ und Φ_ρ wiederspiegeln: Es gilt: $\Phi(t, f) = \alpha_t^0(\phi(f))$ und $\Phi_\rho(t, f) = \alpha_t^\rho(\phi_\rho(f))$.

Damit bleibt die Frage, was wir mit dieser Konstruktion eigentlich gewonnen haben. Hierfür benutzen wir die Behauptung 1.4.3 und die Abkürzungen

$$c(f, \rho) := \langle H_0^{-2}\rho, f\rangle \text{ und } f_t := (e^{it\omega}\hat{f})^\vee \tag{1.201}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \alpha_t^\rho(\phi(f)) + c(f, \rho)\mathbb{1} = \alpha_t^\rho(\phi(f) + c(f, \rho)\mathbb{1}) = \alpha_t^\rho(\phi_\rho(f)) = \\ = \alpha_t^0(\phi(f)) + c(f_t, \rho)\mathbb{1}, \end{aligned} \tag{1.202}$$

woraus

$$\alpha_t^\rho(\phi(f)) = \alpha_t^0(\phi(f)) + c(f_t - f, \rho)\mathbb{1} \tag{1.203}$$

folgt. Da die Algebra $\mathfrak{A}$ von den Feldern $\phi(f)$ erzeugt wird, ist durch die letzte Gleichung α_t^ρ eindeutig bestimmt, *ohne* den Wechselwirkungshamiltonian explizit zu benutzen. Schreiben wir $c(f_t, \rho)$ in Impulsdarstellung auf

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overline{\hat{\rho}(k)}}{\omega^2(k)} \left(e^{it\omega(k)}\hat{f}(k) - \hat{f}(k)\right) d^3k, \tag{1.204}$$

erkennen wir daß der Grenzübergang $\hat{\rho} \to 1$ (also im Ortsraum $\rho \to \delta$) problemlos durchzuführen ist

$$c(\delta, f_t) := \lim_{\hat{\rho}\to 1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overline{\hat{\rho}(k)}}{\omega^2(k)} \left(e^{it\omega(k)}\hat{f}(k) - \hat{f}(k)\right) d^3k \tag{1.205}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{it\omega(k)}\hat{f}(k) - \hat{f}(k)}{\omega^2(k)} d^3k. \tag{1.206}$$

Da f eine Schwartzfunktion ist, ist das letzte Integral und damit auch $c(\delta, f_t - f)$ wohldefiniert. Wir haben damit das wechselwirkende Feld $\Phi_\delta(t, f)$ und die dazugehörigen α_t^δ definiert:

$$\Phi_\delta(t, f) := \alpha_t^\delta(\phi(f)) = \alpha_t^0(\phi(f)) + c(\delta, f_t - f)\mathbb{1}. \tag{1.207}$$

Aus Sicht der Quantenfeldtheorie repräsentieren die Felder Φ_ρ mit $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ einen „Impulsraum-Cutoff". Das heißt, um die bei großen Frequenzen auftretenden Divergenzen (etwa bei dem Versuch den Wechselwirkungshamiltonian für $\rho = \delta$ zu definieren) zu beseitigen, werden diese Frequenzen durch die „Cutoff-Funktion" $\hat{\rho} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ abgeschnitten. Die Theorie ist dann wie wir gesehen haben endlich. Nun haben wir algebraische Methoden benutzt, um den Cutoff zu entfernen und das wechselwirkenden Feld zu definieren. Dies zeigt, wie nützlich algebraische Methoden in der Quantenfeldtheorie sein können und motiviert ein intensiveres Studium von Operatoralgebren, welches wir im nächsten Kapitel beginnen wollen.

Zuvor jedoch wollen wir ein paar Argumente untersuchen, die aufzeigen, daß die Dynamik des Feldes Φ_δ auf dem Fockraum des freien Feldes tatsächlich nicht unitär implementierbar ist. Das heißt auf diesem Hilbertraum gibt es keinen selbstadjungierten Operator H_δ so daß $\Phi_\delta(t, f) = \exp(itH_\delta)\phi_\delta(f)\exp(-itH_\delta)$ ist. Damit eng verknüpft ist die Tatsache, daß es keinen Vektor im Fockraum des freien Feldes gibt, der die Rolle des physikalischen Vakuums übernehmen kann.

Wir definieren zu diesem Zwecke, wie in (1.178), die zum Feld $\Phi_\delta(t, f)$ gehörenden Vernichtungsoperatoren $A_\delta(f)$. Unter Berücksichtigung von (1.207) erhalten wir wegen $\pi_\rho(f) = \partial_t \Phi_\rho(t, f)|_{t=0}$ den Ausdruck (für reellwertiges f):

$$A_\delta(f) = A(f) + d(f, \delta)\mathbb{1}, \quad d(f, \delta) := \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f}{\omega^{3/2}(k)} d^3k. \tag{1.208}$$

$A_\rho(f)$ ist offenbar ein wohldefinierter (abschließbarer) Operator auf dem Fockraum $\mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k))$ und wir sehen, daß er für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)$ definiert ist (bei antilinearer Fortsetzung: $A_\delta(if) := iA_\delta(f)$) denn das Integral $d(f, \delta)$ konvergiert offenbar für jedes solche f. Das physikalische Vakuum ist nun durch die Bedingung $A_\delta(f)\Omega_\delta = 0$ gegeben. Wir werden im folgenden zeigen, daß ein solches Ω_δ nicht existiert:

1.5.1. Satz. *Das einzige Element* Ω_δ *in* $F_0 \subset \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k))$, *so daß* $A_\delta(f)\Omega_\delta = 0$ *für alle* $f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)$ *gilt, ist die Null.*

Beweis: Sei also

$$0 = A_\delta(f)\Omega_\delta = \sum_{n=0}^{\infty} A_\delta(f)\Omega_\delta^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} A(f)\Omega_\delta^{(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} d(f,\delta)\Omega_\delta^{(n)}, \tag{1.209}$$

dann folgt wegen $A_(f)\Omega_\delta^{(n)} \in S_n\mathcal{H}^{(n)}$ und wegen $\mathcal{H}^{(n)} \perp \mathcal{H}^{(n+1)}$ daß für alle n die Gleichung $A(f)\Omega_\delta^{(n+1)} = -d(f,\delta)\Omega_\delta^{n)}$ gilt. Mit der Definition von $A(f)$ (siehe (1.49)) folgt daher

$$\|d(f,\delta)\Omega_\delta^{(n)}\| = \|A(f)\Omega_\delta^{(n+1)}\| \leq \sqrt{n+1}\|f\|\|\Omega_\delta^{(n+1)}\| \tag{1.210}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Ungleichung ist jedoch nur dann erfüllbar, wenn $\Omega_\delta = 0$ ist oder wenn eine Konstante K mit $\|d(f,\delta)\| \leq K\|f\|$ existiert. Letzteres würde bedeuten, daß $f \mapsto d(f,\delta)$ ein stetiges lineares Funktional auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)$ ist. Aufgrund des Darstellungssatzes von Riesz [RS80, II.4] müßte dann jedoch ein $\eta \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)$ existieren, so daß $d(f,\delta) = \langle \eta, f\rangle$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)$. Die konkrete Form von $d(f,\delta)$ impliziert daher, daß $1/\omega^{3/2}$ quadratintegrabel sein muß. Dies ist jedoch nicht der Fall. Wir integrieren hierfür $1/\omega^3$ (also $(1/\omega^{(3/2)})^2$) in Kugelkoordinaten über eine Kugel $K(R) \subset \mathbb{R}^3$ vom Radius R:

$$\int_{S^2}\int_0^R \frac{r^2}{(m^2+r^2)^{3/2}} dr dV(\alpha) = 4\pi \int_0^R \frac{r^2}{(m^2+r^2)^{3/2}} dr \tag{1.211}$$

Das Integral über r verhält sich für große r wie $1/r$ und divergiert daher für $R \to \infty$ (kann man auch zu Fuß ausrechnen). Dies beweist die Aussage. □

Wir können dieses Ergebnis sofort benutzen, um zu zeigen, daß die durch $f \mapsto \phi(f), f \mapsto \pi(f)$ und $f \mapsto \phi_\delta(f), f \mapsto \pi_\delta(f)$ gegebenen Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen unitär inäquivalent sind (daß die Felder $f \mapsto \phi_\delta(f), f \mapsto \pi_\delta(f)$ die Vertauschungsrelationen wirklich erfüllen folgt aus der Definition von $\Phi_\delta(t,f)$ und damit auch von $\phi_\delta(f), \pi_\delta(f)$ in Gleichung (1.207) und aus der Tatsache, daß $f \mapsto \phi(f), f \mapsto \pi(f)$ eine Darstellung der Vertauschungsrelationen ist; siehe Satz 1.3.4). Wären sie nämlich unitär äquivalent, würde ein unitärer Operator existieren, so daß $U\phi(f)U^* = \phi_\delta(f)$ und $U\pi(f)U^* = \pi_\delta(f)$ ist. Dies impliziert aber eine entsprechende Relation für die Vernichtungsoperatoren: $UA(f)U^* = A_\delta(f)$ und diese wiederum würde $0 = UA(f)\Omega_0 = A_\delta(f)U\Omega_0$ zur Folge haben, wenn Ω_0 das nakte Vakuum ist. Also wäre $0 \neq U\Omega_0$ das physikalische Vakuum, welches jedoch, wie soeben gesehen, nicht existiert. Von ähnlicher Art ist die folgende Aussage:

1.5.2. Satz. *Es existiert kein unitärer Operator* $U_t : \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)) \to \mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3, d^3k))$ *so daß* $U_t\phi(f)U_t^* = \alpha_t^\delta(\phi(f))$ *ist.*

Beweis: Angenommen es gäbe ein solches U_t, dann würden $\phi_{\delta,t}(f) = \Phi_\delta(t,f)$ und $\pi_{\delta,t}(f) = \partial_s\Phi_\delta(t+s,f)|_{s=0}$ eine zu $\phi(f), \pi(f)$ unitär äquivalente Darstellung der Vertauschungsrelationen bilden und wie soeben gesehen ein Vakuum $\Omega_{t,\delta}$ besitzen. Dies kann nun, unter Verwendung von Formel (1.207) genauso wie im letzten Beweis zum Widerspruch geführt werden. □

Mit anderen Worten die Dynamik des wechselwirkenden Feldes ist auf dem Hilbertraum des freien Feldes nicht unitär implementierbar! Das heißt insbesondere, daß kein Wechselwirkungshamiltonian existiert (jedenfalls nicht auf dem selben Hilbertraum auf dem der freie Hamiltonian definiert ist). Daher kann eine Streutheorie wie in Bemerkung 1.4.4 skizziert gar nicht formuliert werden. Ein Ausweg aus diesem Dilemma bildet die Störungstheorie. Man versucht die S-Matrix durch eine Störungsreihe zu approximieren. Diese Störungsreihe ist auch als formale Potenzreihe (Term für Term) mathematisch wohldefiniert, sie konvergiert jedoch nicht gegen einen unitären Operator. In diesem einfachen Beispiel ist der Grund dafür klar: Die S-Matrix kann gar nicht als unitärer Operator auf demselben Hilbertraum wie das freie Feld existieren (oder besser gesagt in der selben Darstellung) wenn nichteinmal der Wechselwiekungshamiltonian wohldefiniert ist. Die algebraische Formulierung der Quantentheorie um die wir uns nun kümmern wollen zeigt uns hier ganz deutlich, daß der übliche Fockraumformalismus der Quantenfeldtheorie zu eng für nichttriviale Theorien ist. Fairer Weise muß ich allerdings an dieser Stelle hinzufügen, daß trotz eines besseren Verständnisses der Problematik auch die algebraische Theorie bisher keine Lösung für die Konvergenzprobleme der Störungsreihe bei wirklich interessanten Theorien (wie etwa der Quantenelektrodynamik oder bei polynomialen Selbstwechselwirkungen) gefunden hat.

Kapitel 2

C*-Algebren

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, daß die Einführung von Operatoralgebren von großem Nutzen bei der Untersuchung von Quantenfeldtheorien oder allgemeiner ausgedrückt von Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden sein können. Die grundlegende Idee dabei ist die Observablen der Quantentheorie durch selbstadjungierte Elemente einer Operatoralgebra und die Zustände durch Erwartungswertfunktionale ($A \mapsto \langle\psi, A\psi\rangle$) darzustellen. Um diesen Ansatz konkret auszuformulieren, benötigen wir einige mathematische Grundlagen über Operatoralgebren die in diesem und im nächsten Abschnitt bereitgestellt werden sollen. Dabei werden wir uns (fast) ausschließlich mit Algebren auseinandersetzen, deren Elemente *beschränkte* Operatoren sind (im Gegensatz zur Algebra $\mathfrak{A}$ aus Formel (1.198)). Dies ist aus physikalischer Sicht jedoch keine Einschränkung, da jeder unbeschränkten Observablen (zum Beispiel Impuls oder Energie) Observablen mit „endlicher Skala" zugeordnet werden können (z.B.: „Die Energie ist im Interval (a, b)"). Im Prinzip ist es physikalisch sogar natürlicher nur beschränkte Observablen zu betrachten, da ein reales Meßgerät nur über eine beschränkte Skala verfügen kann.

Wie bereits angedeutet, dient dieses Kapitel der Bereitstellung einiger mathematischer Grundlagen die wir für die spätere Analyse physiklaischer Modelle und Methoden benötigen. Es ist jedoch keine erschöpfende Darstellung der Theorie der Operatoralgebren. Für diese Zwecke möchte ich auf die umfangreiche zu diesem Thema vorhandene Literatur verweisen. Insbesondere auf den ersten Band der Monographie von Bratelli und Robinson [BR79] dem ich im vorliegenden Kapitel weitestgehend folgen werde.

2.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen

Das Standardbeispiel für die Operatoralgebren die wir in diesem Kapitel betrachten wollen ist die Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der beschränkten Operatoren auf einem (komplexen) Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wir wollen daher die wesentlichen mathematischen Eigenschaften dieses Objektes untersuchen. Zunächst ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) eine *assoziative Algebra.*

2.1.1. Definition. *Ein komplexer Vektorraum $\mathcal{A}$ heißt* Algebra*, wenn auf $\mathcal{A}$ eine bilineare Abbildung $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathcal{A}$, die* Multiplikation *ausgezeichnet ist. $\mathcal{A}$ heißt* assoziative Algebra*, wenn das Produkt assoziativ ist:* $(AB)C = A(BC) =: ABC$ *für alle* $A, B, C \in \mathcal{A}$.

Die Multiplikation in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist offenbar das Operatorprodukt. Eine weitere Eigenschaft von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ betrifft die Adjungierten. Zu jedem $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist auch der Adjungierte A^* in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Das heißt $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine **-Algebra.*

2.1.2. Definition. *Eine assoziative Algebra heißt* *-Algebra, *wenn eine antilineare*[1] *Abbildung* $\mathcal{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$ *mit den Eigenschaften*

1. $A^{**} = A$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$ *und*
2. $(AB)^* = B^*A^*$ *für alle* $A; B \in \mathcal{A}$

ausgezeichnet ist. (Eine Abbildung mit diesen Eigenschaften heißt Involution).

Auf der *-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine Norm, die *Operatornorm* $\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ gegeben. Es ist leicht zu zeigen, daß $\mathcal{B}(H)$ mit dieser Norm eine *Banach*-Algebra* ist.

2.1.3. Definition. *Eine assoziative Algebra* $\mathcal{A}$ *heißt* normierte Algebra *wenn auf* $\mathcal{A}$ *eine Norm* $\|\cdot\|$ *mit der Eigenschaft* $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ *für alle* $A, B \in \mathcal{A}$ *ausgezeichnet ist. Ist* $\mathcal{A}$ *eine *-Algebra und gilt zusätzlich* $\|A\| = \|A^*\|$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$*, dann heißt* $\mathcal{A}$ normierte *-Algebra*. Ist schließlich* $\mathcal{A}$ *vollständig in dieser Norm heißt* $\mathcal{A}$ Banach*-Algebra*.*

Damit bleibt eine Eigenschaft von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, genauer gesagt eine Eigenschaft der Operatornorm, die von besonderer Bedeutung ist. Wir können nämlich zeigen daß für alle $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt: $\|AA^*\| = \|A\|^2$. Dies folgt *nicht* aus den Eigenschaften einer Banach*-Algebra. Dort gilt im allgemeinen nur $\|AA^*\| \leq \|A\|^2$, weshalb es sich um eine echte Zusatzeigenschaft handelt, die Banach*-Algebren von *C*-Algebren* unterscheidet.

2.1.4. Definition. *Eine Banach*-Algebra* $\mathcal{A}$ *heißt C*-Algebra, wenn die zusätzliche Bedingung* $\|AA^*\| = \|A\|^2$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$ *erfüllt ist.*

Mit Algebren dieses Typs wollen wir uns im Folgenden beschäftigen und beginnen mit ein paar Beispielen.

2.1.5. Beispiel. *Zunächst die Algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *aller beschränkten, linearen Operatoren auf einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$*. Wir haben bereits bemerkt, daß* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *mit dem Operatorprodukt als Multiplikation, der Hilbertraumadjungierten als *-Operation und der Operatornorm eine C*-Algebra ist.*

2.1.6. Beispiel. *Ist insbesondere* $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ *erhalten wir mit dem Raum* $M(n, \mathbb{C})$ *aller komplexen* $n \times n$*-Matrizen einen Spezialfall dieses Beispiels.*

2.1.7. Beispiel. *Die komplexen Zahlen bilden mit dem Betrag als Norm eine abelsche C-*-Algebra.*

2.1.8. Beispiel. *Ist* $\mathcal{A}$ *eine C*-Algebra, dann ist auch jede normabgeschlossene, selbstadjungierte (d.h. abgeschlossen unter der *-Operation) Unteralgebra* $\mathcal{B}$ *von* $\mathcal{A}$ *eine C*-Algebra.*

---

[1] Das heißt $(\lambda A + B)^* = \bar{\lambda} A^* + B^*$.

2.1.9. Beispiel. *Ist also insbesondere $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{B} = \mathcal{LC}(\mathcal{H})$, die Algebra der* kompakten *Operatoren, erhalten einen Spezialfall dieses Beispiels.*

2.1.10. Beispiel. *Die Algebra $\mathfrak{A}$ aus dem Abschnitt 1.5 (siehe Gleichung (1.198)) ist mit Operatorprodukt und Adjungiertem eine *-Algebra. Es ist* keine *Norm gegeben, da die Elemente von $\mathfrak{A}$ unbeschränkte Operatoren sind.*

2.1.11. Beispiel. *Sei X ein lokal kompakter, topologischer Raum und $C_0(X)$ der Raum der stetigen, komplexwertigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, das heißt für jedes $f \in C_0(X)$ und für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert ein Kompaktum $K \subset X$ so daß $|f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Wir definieren das Produkt punktweise: $(fg)(x) := f(x)g(x)$, die *-Operation durch komplexe Konjugation $f^* := \bar{f}$ und die Norm durch $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$.*

Betrachten wir nun ein Maß μ auf X und den Hilbertraum $L^2(X, \mu)$ dann können wir $C_0(X)$ als Algebra der Multiplikationsoperatoren *auf diesem Hilbertraum auffassen. Daher ist dieses Beispiel ebenfalls ein Spezialfall von 2.1.8.*

2.1.12. Beispiel. *Zum Schluß schließlich noch eine Kombination des letzen Beispiels mit 2.1.5. Wir betrachten den Raum $C_0(X, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ von stetigen Abbildung auf X mit Werten in der Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die genauso wie zuvor im Unendlichen verschwinden. Dies liefert wie in 2.1.11 eine C*-Algebra, die jedoch nicht kommutativ ist.*

Eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von C*-Algebren bilden Algebren mit Identität, das heißt:

2.1.13. Definition. *Ein Element $\mathbb{1}$ einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* Identität *(und $\mathcal{A}$ dann C*-Algebra mit Identität), wenn für alle Elemente $A \in \mathcal{A}$ die Gleichung $\mathbb{1}A = A\mathbb{1} = A$ gilt.*

Wenn eine Algebra eine Identität besitzt so ist diese eindeutig, denn wenn es zwei Identiäten $\mathbb{1}, \mathbb{1}' \in \mathcal{A}$ gibt dann folgt $\mathbb{1} = \mathbb{1}\mathbb{1}' = \mathbb{1}'$ also $\mathbb{1} = \mathbb{1}'$. Es kann allerdings passieren, daß eine Algebra keine Identität besitzt. In diesem Falle ist es für viele Zwecke nötig eine solche hinzuzufügen. Wie dies geschieht erklärt die folgende Aussage.

2.1.14. Behauptung. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra ohne Eins und $\mathbb{C}\mathbb{1} + \mathcal{A}$ der Produktraum $\mathbb{C} \times \mathcal{A}$ mit der Multiplikation $(\alpha, A)(\beta, B) = (\alpha\beta, \alpha B + \beta A + AB)$, der *-Operation $(\alpha, A)^* = (\bar{\alpha}, A^*)$ und der Norm*

$$\|(\alpha, A)\| := \sup\{\|\alpha B + AB\| \mid B \in \mathcal{A},\ \|B\| = 1\}. \tag{2.1}$$

$\mathbb{C}\mathbb{1}+\mathcal{A}$ ist eine C-Algebra mit Eins. $\mathcal{A}$ kann mit der Unteralgebra $\{(0, A) \in \mathbb{C}\mathbb{1}+\mathcal{A}\}$ von $\mathbb{C}\mathbb{1} + \mathcal{A}$ identifiziert werden.*

Beweis: Der Beweis ist ein einfaches Überprüfen der Definitionen und bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen (siehe auch [BR79, Prop. 2.1.5]). □

2.1.15. Beispiel. *Wir Betrachten erneut das Beispiel 2.1.11.* $\bar{X} := X \cup \{\infty\}$ *bezeichne die Einpunktkompaktifizierung von* X. *Dann ist* $\mathbb{C}\mathbb{1} + C_0(X)$ *isomorph zur Algebra* $C^0(\bar{X})$ *aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf* $\bar{X}$. *Multiplikation, *-Operation und Norm in* $C^0(\bar{X})$ *sind dabei wie in* $C_0(X)$ *definiert, und der Isomorphismus ist durch* $\mathbb{C}\mathbb{1} + C_0(X) \ni (\alpha, f) \mapsto \alpha + \tilde{f} \in C^0(\bar{X})$ *mit der eindeutigen, stetigen Fortsetzung* $\tilde{f}$ *von* $f \in C_0(X)$ *auf* $\bar{X}$ *gegeben.*

Weitere wichtige Grundbegriffe der Algebrentheorie sind *Ideale* und die durch diese gegebenen *Quotientenalgebren.*

2.1.16. Definition. *Sei* $\mathcal{A}$ *eine assoziative Algebra und* $\mathcal{B}$ *ein Vektorteilraum von* $\mathcal{A}$.

1. *Dann heißt* $\mathcal{B}$ *ein* linksseitiges Ideal *von* $\mathcal{A}$, *wenn* $AB \in \mathcal{B}$ *aus* $A \in \mathcal{A}$ *und* $B \in \mathcal{B}$ *folgt. Entsprechend heißt* $\mathcal{B}$ rechtsseitiges Ideal *wenn* $BA \in \mathcal{B}$ *ist und* zweiseitiges Ideal *wenn beide Aussagen erfüllt sind.*

2. *Wenn* $\mathcal{A}$ *eine *-Algebra ist, dann heißt* $\mathcal{B}$ selbstadjungiert *(siehe Beispiel 2.1.8) falls für jedes* $B \in \mathcal{B}$ *auch* B^* *Element von* $\mathcal{B}$ *ist. Ein (linksseitiges/rechtsseitiges) Ideal* $\mathcal{B}$ *von* $\mathcal{A}$ *heißt dann* *-Ideal *wenn es zugleich selbstadjungiert ist.*

2.1.17. Bemerkung. *Jedes Ideal* $\mathcal{B}$ *ist automatisch eine Unteralgebra von* $\mathcal{A}$, *denn wenn* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *dann ist* $B_1 \in \mathcal{A}$ *und somit* $B_1B_2 \in \mathcal{B}$.

2.1.18. Bemerkung. *Jedes *-Ideal* $\mathcal{B}$ *ist ein zweiseitiges Ideal von* $\mathcal{A}$. *Sei* $\mathcal{B}$ *zum Beispiel ein linksseitiges Ideal, dann ist* $AB \in \mathcal{B}$ *für alle* $B \in \mathcal{B}$ *und* $A \in \mathcal{A}$. *Wegen der Selbstadjungiertheit von* $\mathcal{B}$ *ist* B^* *ebenfalls ein Element von* $\mathcal{B}$. *Daher ist* $A^*B^* \in \mathcal{B}$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$ *und erneut wegen der Selbstadjungiertheit* $BA = (A^*B^*)^* \in \mathcal{B}$.

Betrachten wir nun eine Banach*-Algebra $\mathcal{A}$ und ein abgeschlossenes *-Ideal $\mathcal{I}$. Dann ist der Quotientenraum $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ erneut ein Banachraum mit der Norm ($[A]$ bezeichne die Äquivalenzklasse von A)

$$\|[A]\| = \inf\{\|A + I\| \mid I \in \mathcal{I}\}. \tag{2.2}$$

Wir können jedoch aus $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ sogar eine Banach*-Algebra machen. Wir führen hierzu die Multiplikation

$$\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}/\mathcal{I} \ni [A][B] \mapsto [AB] \in \mathcal{A}/\mathcal{I} \tag{2.3}$$

und die *-Operation

$$\mathcal{A}/\mathcal{I} \ni [A] \mapsto [A^*] \in \mathcal{A}/\mathcal{I} \tag{2.4}$$

ein. Diese Operationen sind unabhängig vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse, denn mit $A + I_1 \in [A]$ und $B + I_2 \in [B]$ ($I_1, I_2 \in \mathcal{I}$) ist offenbar $(A + I_1)(B + I_2) = AB + AI_2 + I_1B + I_1I_2$ und $AI_2 + I_1B + I_1I_2 := I_3 \in \mathcal{I}$, was $A + B + I_3 \in [A + B]$ impliziert. Ebenso ist $(A + I_1)^* = A^* + I_1^* \in [A^*]$ wegen $I_1^* \in \mathcal{I}$. Wir haben damit die folgende Aussage bewiesen:

2.1.19. Behauptung. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banach*-Algebra und $\mathcal{I}$ ein *-Ideal, dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ zusammen mit der Multiplikation aus (2.3), der *-Operation aus (2.4) und der Norm aus (2.2) eine Banach*-Algebra, welche die* Quotientenalgebra *genannt wird.*

2.1.20. Beispiel. *Betrachten wir zum Beispiel die Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der beschränkten Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ (siehe 2.1.5) und einen Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{I}_\Omega := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, A\Omega = 0\}$ ein linksseitiges Ideal.*

2.1.21. Beispiel. *Die Algebra der kompakten Operatoren aus Beispiel 2.1.9 ist ein *-Ideal der Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, denn das Produkt eines beschränkten Operators mit einem kompakten Operator ist ein kompakter Operator.*

2.1.22. Beispiel. *Betrachten wir schließlich noch die Algebra $C_0(X)$ aus Beispiel 2.1.11. Ist $F \subset X$ eine abgeschlossene Menge, dann ist $\mathcal{I} := \{f \in C_0(X) \,|\, f(x) = 0, \forall x \in F\}$ ein abgeschlossenes *-Ideal. Die Quotientenalgebra kann mit der Algebra $C_0(F)$ identifiziert werden.*

2.2 Resolvente und Spektrum

Einer der wichtigsten Begriffe aus der Operatortheorie ist der des Spektrums eines Operators. Für die Definition des Spektrums sind jedoch nur rein algebraische Methoden notwendig, die auf jeder assoziativen Algebra zur Verfügung stehen.

2.2.1. Definition. *Sei $\mathcal{A}$ eine assoziative Algebra mit Identität $\mathbb{1}$,*

1. *dann heißt eine Element $A \in \mathcal{A}$* invertierbar, *wenn zu A ein* inverses *Element A^{-1} existiert. Das heißt es gilt $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$ (Das Inverse ist offenbar eindeutig).*

2. *Für jedes Element $A \in \mathcal{A}$ ist die* Resolventenmenge *durch*

$$r_{\mathcal{A}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda\mathbb{1} - A \text{ ist invertierbar}\} \subset \mathbb{C} \tag{2.5}$$

definiert. Das zu $\lambda\mathbb{1} - A$ inverse Element $(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}$ heißt die Resolvente A *in λ.*

3. *Das Komplement $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ der Resolventenmenge $r_{\mathcal{A}}(A)$ heißt das* Spektrum *von A.*

Ist $\mathcal{A}$ eine assoziative Algebra ohne *Identität, dann benutzen wir die Algebra $\mathbb{C}\mathbb{1} + \mathcal{A} =: \tilde{\mathcal{A}}$ zur Definition der Resolventenmenge und des Spektrums. Mit anderen Worten wir definieren in diesem Fall: $r_{\mathcal{A}}(A) = r_{\tilde{\mathcal{A}}}(A)$ und $\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \sigma_{\tilde{\mathcal{A}}}(A)$.*

2.2.2. Beispiel. *Für die Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und einen beschränkten Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ stimmen die Begriffe Resolvente, Resolventenmenge und Spektrum offenbar mit den aus der Funktionalanalysis bekannten Begriffen überein.*

2.2.3. Beispiel. *Ein Spezialfall ist die Algebra $M(n, \mathbb{C})$ der komplexwertigen $n \times n$ Matrizen. $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Element des Spektrums der Matrix $A \in M(n, \mathbb{C})$ wenn λ Eigenwert von A ist. Der Fundamentalsatz der Algebra impliziert offenbar, daß das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ nicht leer ist.*

2.2.4. Beispiel. *Betrachten wir $\mathbb{C}$ als C*-Algebra. Das Spektrum einer komplexen Zahl* z *ist offenbar* $\sigma_{\mathbb{C}}(z) = \{z\}$. *Die Resolvente von* z *in* $\lambda \neq z$ *ist also* $1/(\lambda - z)$.

2.2.5. Beispiel. *Schließlich betrachten wir noch die abelsche Algebra* $C^0(\bar{X})$ *aus 2.1.15). Das Spektrum einer Funktion* $f \in C^0(\bar{X})$ *ist durch* $\sigma_{C^0(\bar{X})}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$ *gegeben.*

Die Analyse des Spektrums eines Elements einer assoziativen Algebra kann sehr kompliziert sein. Im Falle von Banach*- und C*-Algebren stehen jedoch zahlreiche Techniken zur Verfügung, die zu starken Aussagen führen. Viele Aussagen dieses und des nächsten Abschnittes lassen sich mit Hilfe von Reihenentwicklungen und analytische Fortsetzungen beweisen. Wir wollen die Grundidee hier kurz skizzieren und ansonsten auf die entsprechenden Stellen in [BR79] verweisen.

Sei $\mathcal{A}$ also eine Banach*-Algebra, $A \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\lambda > \|A\|$ dann ist die Folge der Partialsummen der Reihe

$$\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \tag{2.6}$$

offenbar eine Cauchyfolge in der Normtopologie von $\mathcal{A}$ und konvergiert wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{A}$ gegen ein Element aus $\mathcal{A}$. Betrachten wir nun

$$(\lambda \mathbb{1} - A)\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^{n+1} \tag{2.7}$$

$$= \mathbb{1}. \tag{2.8}$$

Daher folgt also

$$\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} \tag{2.9}$$

und $\lambda \in r_{\mathcal{A}}(A)$. Mit anderen Worten das Spektrum ist durch $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(A) \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$ beschränkt. Auf ähnliche Weise zeigt man, daß für $\lambda_0 \in r_{\mathcal{A}}(A)$ und $|\lambda - \lambda_0| \leq \|\lambda_0 \mathbb{1} - A)^{-1}\|$ die *Neumannsche Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (\lambda_0 \mathbb{1} - A)^{-n-1} \tag{2.10}$$

gegen ein Element von $\mathcal{A}$ konvergiert, welches das Inverse von $\lambda \mathbb{1} - A$ ist, also $\lambda \in r_{\mathcal{A}}(A)$. Dies zeigt insbesondere, daß $r_{\mathcal{A}}(A) \subset \mathbb{C}$ offen und $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ damit abgeschlossen ist. Außerdem ist $\lambda \mapsto (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1}$ stetig auf $r_{\mathcal{A}}(A)$.

Mit ähnlichen Methoden läßt sich nun zeigen, daß das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ nicht leer ist.

2.2.6. Behauptung. *Sei* $\mathcal{A}$ *eine Banach*-Algebra mit Identität* $\mathbb{1}$ *und* $A \in \mathcal{A}$, *dann ist durch* $\rho(A) = \sup_{\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(A)} |\lambda|$ *der* Spektralradius *definiert. Er erfüllt die Ungleichung*

$$\rho(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|. \tag{2.11}$$

Dieser Grenzwert existiert für alle A, *was impliziert, daß* $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ *nicht leer ist.*

Beweis: Siehe [BR79, Prop. 2.2.2]. □

Als nächstes wollen wir nun die Spektren bestimmter Klassen von Elementen einer C*-Algebra charakterisieren. Wir definieren hierzu:

2.2.7. Definition. *Sei $\mathcal{A}$ eine *-Algebra, dann heißt ein Element $A \in \mathcal{A}$*

1. normal *wenn $AA^* = A^*A$ gilt und*
2. selbstadjungiert *wenn $A = A^*$ ist.*
3. *Hat $\mathcal{A}$ eine Identität $\mathbb{1}$ dann heißt A eine* Isometrie *wenn $A^*A = \mathbb{1}$ ist und*
4. unitär *wenn $A^*A = AA^* = \mathbb{1}$*

2.2.8. Bemerkung. *Jedes Element A einer *-Algebra $\mathcal{A}$ hat eine eindeutige Zerlegung in die Summe $A = A_1 + iA_2$ wobei $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert sind. Sie sind offenbar durch $A_1 = (A + A^*)/2$ und $A_2 = (A - A^*)/2$ gegeben.*

2.2.9. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra mit Identität $\mathbb{1}$, dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Für normales oder selbstadjungiertes $A \in \mathcal{A}$ ist der Spektralradius $\rho(A)$ durch $\rho(A) = \|A\|$ gegeben.*
2. *Wenn A isometrisch oder unitär ist, dann gilt $\rho(A) = 1$ und*
3. *für unitäres A ist $\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \|\lambda\| = 1\}$.*
4. *Das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ eines selbstadjungierten Elementes A ist im Intervall $[-\|A\|, \|A\|]$ enthalten und für das Quadrat A^2 gilt: $\sigma_{\mathcal{A}}(A^2) \subset [0, \|A\|^2]$.*
5. *Für ein beliebiges $A \in \mathcal{A}$ und jedes Polynom P ist $\sigma_{P(\mathcal{A})}(A) = P(\sigma_{\mathcal{A}}(A))$.*

Beweis: Siehe [BR79, Thm. 2.2.5]. Wir wollen hier nur 1. beweisen, weil dort besonders deutlich die C*-Eigenschaft eingeht. Aus Beh. 2.2.6 wissen wir daß die Folge $(\|A^n\|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\rho(A)$ konvergiert. Daher konvergiert auch die Teilfolge $(\|A^{2^n}\|^{1/2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\rho(A)$. Betrachten wir also $\|A^{2^n}\|^2$. Wegen der C*-Eigenschaft und wegen der Normalität von A gilt:

$$\|A^{2^n}\|^2 = \|(A^*)^{2^n} A^{2^n}\| = \|(A^*A)^{2^n}\|. \tag{2.12}$$

Nun ist jedoch $(AA^*)^{2^{n-1}}$ selbstadjungiert und daher gilt unter Verwendung der C*-Eigenschaft

$$\|(A^*A)^{2^n}\| = \|(A^*A)^{2^{n-1}}(A^*A)^{2^{n-1}}\| = \|(A^*A)^{2^{n-1}}\|^2. \tag{2.13}$$

Wenden wir diese Prozedur induktiv an, erhalten wir

$$\|A^{2^n}\|^2 = \|AA^*\|^{2^n} = \|A\|^{2^{n+1}}. \tag{2.14}$$

Nun ist wie eingangs bemerkt

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\|A^{2^n}\|^2\right)^{2^{-(n+1)}} \tag{2.15}$$

und mit (2.14) daher

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \left(\|A^{2^n}\|^2\right)^{2^{-(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\|A\|^{2^{n+1}}\right)^{2^{-(n+1)}} = \|A\| \tag{2.16}$$

was zu beweisen war. □

Wir sehen an dieser Aussage, daß bei C*-Algebren die Topologie sehr eng mit der algebraischen Struktur verknüpft ist, denn die Norm definiert die Topologie von $\mathcal{A}$ und ist aufgrund des soeben bewiesenen Satzes direkt mit dem Spektralradius verknüpft, der ein rein algebraisches Konzept ist. Es gilt daher die folgende Aussage:

2.2.10. Korollar. *Sei $\mathcal{A}$ eine *-Algebra, auf der eine Norm gegeben ist, die die C*-Eigenschaft erfüllt. Ist $\mathcal{A}$ vollständig in dieser Norm, dann ist sie eindeutig.*

Beweis: Offenbar muß für selbstadjungierte $A \in \mathcal{A}$ die Gleichung $\rho(A) = \|A\|$ gelten und für beliebiges A die Gleichung $\|A\| = \|AA^*\|^{1/2} = \rho(AA^*)^{1/2}$. Da der Spektralradius aber, wie soeben bemerkt, ein rein algebraisches Konzept ist, ist die Aussage bewiesen. □

Der Begriff des Spektrums ist von der Algebra abhängig, in der er definiert ist. Ist also $\mathcal{B}$ eine Teilalgebra einer assoziativen Algebra $\mathcal{A}$, dann gilt für $A \in \mathcal{B}$ zwar $\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(A)$ jedoch sind beide Mengen im allgemeinen nicht identisch. Eine Ausnahme bilden hier C*-Algebren.

2.2.11. Satz. *Sei $\mathcal{B}$ eine C*-Teilalgebra einer C*-Algebra $\mathcal{A}$, dann gilt für alle $A \in \mathcal{B}$ die Gleichung $\sigma_{\mathcal{B}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A)$.*

Beweis: Die Idee des Beweises ist es die C*-Algebra $\mathcal{C}$ zu betrachten, die von A, A^* und $\mathbb{1}$ erzeugt wird (das heißt die kleinste Teilalgebra von $\mathcal{A}$ die alle drei Elemente enthält). Offenbar ist dann $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ und die Behauptung folgt wenn $\sigma_{\mathcal{C}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A)$ bewiesen wurde. Um dies durchzuführen, ist die Spektralradiusformel (Punkt 1 in Satz 2.2.9) notwendig. Auf diese Weise geht die C*-Eigenschaft in den Beweis ein. Details sind bitte [BR79, Prop. 2.2.7] zu entnehmen. □

2.2.12. Bemerkung. *Da also das Spektrum von $A \in \mathcal{A}$* nicht *von der Algebra abhängt, werden wir im Folgenden die Algebra $\mathcal{A}$ nicht mehr im Index führen. Das heißt wir schreiben $\sigma(A)$ statt $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$.*

2.3 Positive Elemente

Die wohl nützlichste Teilmenge einer C*-Algebra ist die Menge der *positiven* Elemente. Durch sie ist es möglich eine partielle Ordnung auf der Algebra einzuführen und quantitative Abschätzungen durchzuführen. Wir werden auch in diesem Abschnitt auf die meisten Beweise verzichten und stattdessen auf den entsprechenden Abschnitt in [BR79] verweisen.

2.3.1. Definition. *Ein Element A einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* positiv*, wenn es selbstadjungiert ist und wenn das Spektrum $\sigma(A)$ Teilmenge der positiven Halbachse ist. Die Menge aller positiven Elemente von $\mathcal{A}$ wird mit $\mathcal{A}_+$ bezeichnet.*

2.3.2. Beispiel. *Betrachten wir die komplexen Zahlen, dann ist* $\mathbb{C}_+ = \mathbb{R}_0^+ + i0$, *also die positiven rein reellwertigen Zahlen.*

2.3.3. Beispiel. *In der Algebra* $C_0(X)$ *ist ein Element* f *genau dann positiv, wenn* $f(x) \in \mathbb{R}_0^+$ *für alle* $x \in X$ *ist.*

2.3.4. Beispiel. *In der Algebra* $M(n, \mathbb{C})$ *aller komplexen* $n \times n$ *Matrizen ist ein Element positiv, wenn alle Eigenwerte reell und positiv sind.*

2.3.5. Beispiel. *Ein beschränkter, selbstadjungierter Operator* A *auf dem Hilbertraum* $\mathcal{H}$, *also ein Element der C*-Algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ist positiv, wenn* $\langle \psi, A\psi \rangle > 0$ *für alle* $\psi \in \mathcal{H}$ *gilt.*

Aus einem positiven Element $f \in C_0(X)$ läßt sich offenbar die Wurzel $\sqrt{f}$ ziehen. Der folgende Satz zeigt daß es sich dabei um ein allgemeines Konzept handelt, welches auf beliebigen C*-Algebren definiert ist.

2.3.6. Satz. *Sei* $\mathcal{A}$ *eine C*-Algebra und* A *ein selbstadjungiertes Element.* A *ist genau dann positiv, wenn ein selbstadjungiertes Element* $B \in \mathcal{A}$ *existiert, so daß* $B^2 = A$ *ist.* B *ist eindeutig und liegt in der von* A *erzeugten abelschen Unteralgebra von* $\mathcal{A}$. *Wir nennen dieses eindeutige* B *die* Wurzel *von* A *und schreiben* $B = \sqrt{A}$ *oder* $B = A^{1/2}$.

Beweis: Siehe [BR79, Thm. 2.2.10]. □

Mit der Definition der Wurzel können wir nun den Betrag eines selbstadjungierten Elementes $A \in \mathcal{A}$ definieren:

2.3.7. Definition. *Sei* $\mathcal{A}$ *ein C*-Algebra und* $A \in \mathcal{A}$ *ein selbstadjungiertes Element, dann ist durch* $|A| = \sqrt{A^2}$ *der* Betrag *von* A *definiert.*

Als nächstes untersuchen wir die Eigenschaften der Menge $\mathcal{A}_+$ und die Zerlegung von selbstadjungierten Elementen in positive und negative Anteile.

2.3.8. Satz. *Die Menge* $\mathcal{A}_+$ *der positiven Elemente der C*-Algebra* $\mathcal{A}$ *ein normabgeschlossener, konvexer Kegel mit der Eigenschaft* $\mathcal{A}_+ \cap -\mathcal{A}_+ = \{0\}$. *Ist* $A \in \mathcal{A}$ *selbstadjungiert und definieren wir* $A_\pm = (|A| \pm A)/2$ *dann gilt:*

1. $A_\pm \in \mathcal{A}_+$,
2. $A = A_+ - A_-$ *und*
3. $A_+ A_- = 0$.

$A_\pm$ *sind die einzigen Elemente mit diesen Eigenschaften. Die Zerlegung von* A *in* $A_\pm$ *heißt* orthogonale Zerlegung *von* A.

Beweis: Siehe [BR79, Prop. 2.2.11]. □

2.3.9. Beispiel. *Betrachten wir einen selbstadjungierten beschränkten Operator auf dem Hilbertraum* $\mathcal{H}$, *also ein Element der Algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Bezeichne nun* $E_+ = E(0, \infty)$ *bzw.* $E_- = E(-\infty, 0)$ *die zur positiven, bzw. negativen Halbachse gehörenden Spektralprojektoren von* A. *Dann gilt* $A_\pm = \pm E_\pm A E_\pm$.

2.3.10. Beispiel. *Für ein selbstadjungiertes Element* f *der Algebra* $C_0(X)$ *gilt:* $f_+(x) = \theta(f(x))$ *und* $f_-(x) = \theta(-f(x))$, *wobei* θ *durch* $\theta(x) = 0$ *für* $x < 0$ *und* $\theta(x) = x$ *für* $x \geq 0$ *definiert ist.*

2.3.11. Beispiel. *Eine reelle Zahl* $0 \neq z = x + i0 \in \mathbb{C}$ *ist entweder positiv oder negativ. Also* $z_+ = z,\ z_- = 0$ *oder* $z_+ = 0,\ z_- = -z$.

Die Existenz der orthogonalen Zerlegung ist unter anderem nützlich bei dem Beweis des folgenden Satzes, welcher die wichtigste Charakterisierung positiver Elemente darstellt:

2.3.12. Satz. *Sei* $\mathcal{A}$ *eine C*-Algebra und* $A \in \mathcal{A}$, *dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. A *ist positiv;*

2. $A = BB^*$ *für ein* $B \in \mathcal{A}$.

Beweis: Die Implikation 1. $\Rightarrow$ 2. ist bereits im Satz 2.3.6 enthalten. Die Beweisidee für die andere Richtung ist die orthogonale Zerlegung $BB^* = C - D$ zu untersuchen. Offenbar ist zu zeigen, daß $D = 0$ ist. Details finden sich in [BR79, Thm. 2.2.12]. □

Die Struktur der Menge $\mathcal{A}_+$ (konvexer Kegel) erlaubt es außerdem auf der Menge aller selbstadjungierten Elemente von $\mathcal{A}$ eine Ordnungsrelation zu definieren.

2.3.13. Behauptung. *Auf der Menge aller selbstadjungierten Elemente einer C*-Algebra* $\mathcal{A}$ *ist durch* $A \geq B \iff A - B \in \mathcal{A}_+$ *eine Partialordnung definiert, welche die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *Aus* $A \geq B \geq 0$ *folgt* $\|A\| \geq \|B\|$.

2. *Aus* $A \geq 0$ *folgt* $A\|A\| \geq A^2$.

3. *Aus* $A \geq B \geq 0$ *folgt* $C^*AC \geq C^*BC \geq 0$ *für alle* $C \in \mathcal{A}$.

4. *Besitzt* $\mathcal{A}$ *eine Identität, dann folgt aus* $A \geq B \geq 0$ *und* $\lambda > 0$ *daß* $(B+\lambda\mathbb{1})^{-1} \geq (A + \lambda\mathbb{1})^{-1}$ *ist.*

Beweis: Siehe [BR79, Prop. 2.2.13]. □

Am Ende dieses Abschnittes wollen wir noch zwei nützliche Zerlegungen beliebiger Elemente einer C*-Algebra angeben.

2.3.14. Behauptung. *In einer C*-Algebra* $\mathcal{A}$ *mit Identität hat jedes Element* $A \in \mathcal{A}$ *eine Zerlegung der Form* $A = a_1U_1 + a_2U_2 + a_3U_3 + a_4U_4$ *mit den unitären Elementen* $U_i,\ i = 1, \dots, 4$ *und* $a_i \in \mathbb{C}$ *mit* $|a_i| \leq \|A\|/2$.

Beweis: Es reicht offenbar den Fall $\|A\| = 1$ zu betrachten. Dann ist $A = A_1 + A_2$ mit den selbstadjungierten Elementen $A_1 = (A+A^*)/2$ und $A_2 = (A-A^*)/2$ (siehe Bem. 2.2.8). Offenbar ist $\|A_1\| \leq 1$ und $\|A_2\| \leq 1$. Jedes selbstadjungierte Element B von $\mathcal{A}$ mit $\|B\| \leq 1$ läßt sich jedoch als Summe von zwei unitären Elementen schreiben; Mit $U_\pm = B \pm i\sqrt{\mathbb{1} - B^2}$ gilt $B = (U_+ - U_-)/2$. □

Die zweite Zerlegung ist die aus der Funktionalanalysis bekannte Polarenzerlegung.

2.3.15. Behauptung. *In einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ mit Identität hat jedes invertierbare Element $A \in \mathcal{A}$ eine Zerlegung der Form $A = U|A|$, wobei $|A| = \sqrt{AA^*}$ und U unitär ist.*

Beweis: Übungsaufgabe! Zeige $|A|$ ist invertierbar und definiere $U = A|A|^{-1}$. □

2.4 Darstellungen von C*-Algebren

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir Teile der abstrakten Algebrentheorie betrachtet und Teilalgebren der Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ als Beispiele benutzt. In diesem Abschnitt wollen wir die Darstellungstheorie und damit die Verknüpfung zwischen abstrakten C*-Algebren und Operatoralgebren aufzeigen. Wir beginnen mit der Definition von *-Automorphismen.

2.4.1. Definition. *Eine Abbildung $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei C*-Algebren heißt* *-Morphismus *von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ wenn π die folgenden Axiome erfüllt:*

1. *π ist linear: $\pi(\alpha A + \beta B) = \alpha\pi(A) + \beta\pi(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*
2. *π ist multiplikativ: $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$.*
3. *π vertauscht mit der *-Operation: $\pi(A^*) = \pi(A)^*$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*

*Ein *-Morphismus heißt* *-Isomorphismus *wenn er bijektiv ist. Die Umkehrabbildung ist dann ebenfalls ein *-Isomorphismus. Ein *-Isomorphismus heißt* *-Automorphismus *wenn $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ist.*

Wir haben bereits in Zusammenhang mit dem Spektralradius bemerkt, daß topologische und algebraische Eigenschaften einer C*-Algebra eng beieinander liegen. Dieser Umstand wird auch bei *-Morphismen deutlich, denn sie sind automatisch stetig:

2.4.2. Behauptung. *Ein *-Morphismus $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von der C*-Algebra $\mathcal{A}$ in die C*-Algebra $\mathcal{B}$*

1. *ist* stetig, *das heißt $\|\pi(A)\| \leq \|A\|$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*
2. *Außerdem ist π* positiv, *das heißt für alle $A \geq 0$ folgt $\pi(A) \geq 0$.*

Beweis: Zu 2. Wenn $\mathcal{A} \ni A \geq 0$ ist, dann existiert wegen Satz 2.3.12 ein $B \in \mathcal{A}$ mit $A = BB^*$. Also ist $\pi(A) = \pi(BB^*) = \pi(B)\pi(B)^* \geq 0$.

Zu 1. Aus Behauptung 2.3.13(2) folgt $0 \leq (A^*A)^2 \leq A^*A\|A^*A\|$. Die 2. Aussage dieser Behauptung impliziert also $0 \leq \pi(A^*A)^2 \leq \pi(A^*A)\|A^*A\|$ und mit 2.3.13(1) folgt dann $\|\pi(A)\|^4 = \|\pi(A * A)\|^2 \leq \|\pi(A^*A)\|\|A^*A\| = \|\pi(A)\|^2\|A\|^2$. dies ist aber äquivalent zu $\|\pi(A)\| \leq \|A\|$ was zu beweisen war. □

2.4.3. Bemerkung. *Als unmittelbare Konsequenz der letzten Aussage ist das Bild jedes *-Morphismus* $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *eine C*-Teilalgebra von* $\mathcal{B}$. *Denn* $\pi(\mathcal{A})$ *ist offenbar ein linearer Teilraum, abgeschlossen unter der Multiplikation in* $\mathcal{B}$ *und selbstadjungiert. Wegen der Stetigkeit von* π *ist* $\pi(\mathsf{A})$ *auch abgeschlossen in der Normtopologie.*

*Der *-Morphismus* π *ist also ein *-Isomorphismus von* $\mathcal{A}$ *auf das Bild* $\pi(\mathcal{A})$ *wenn* π *injektiv ist. Mit anderen Worten, wenn der* Kern $\ker(\pi) := \{\mathsf{A} \in \mathcal{A} \mid \pi(\mathsf{A}) = 0\}$ *von* π *gleich* $\{0\}$ *ist.*

Es ist leicht zu zeigen, daß $\ker(\pi)$ *ein *-Ideal von* $\mathcal{A}$ *ist. Wir können daher die Quotientenalgebra* $\mathcal{A}_\pi = \mathcal{A}/\ker(\pi)$ *bilden (siehe Beh. 2.1.19). Der Morphismus* π *induziert dann einen *-Isomorphismus* $\hat{\pi}$ *von* $\mathcal{A}_\pi$ *auf* $\pi(\mathcal{A})$.

Wir haben nun alle Begriffe eingeführt, die notwendig sind um Darstellungen von C*-Algebren zu definieren.

2.4.4. Definition. *Eine* Darstellung *der C*-Algebra* $\mathcal{A}$ *ist ein Paar* $(\mathcal{H}, \pi)$ *bestehend aus dem (komplexen) Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *und dem *-Morphismus* π *von* $\mathcal{A}$ *in die C*-Algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *aller beschränkter, linearer Operatoren auf* $\mathcal{H}$ *(siehe Beispiel 2.1.5). Die Darstellung* $(\mathcal{H}, \pi)$ *heißt* treu *wenn* π *ein *-Isomorphismus auf sein Bild* $\pi(\mathcal{A})$ *ist, daß heißt wenn* $\ker(\pi) = \{0\}$ *ist.*

2.4.5. Bemerkung. *Im Zusammenhang mit Darstellungen hat sich im Laufe der Zeit die folgende zusätzliche Terminologie eingebürgert: Der Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *heißt der* Darstellungs(hilbert)raum, *das Element* $\pi(\mathsf{A})$ *heißt der* Darsteller *(von* A*) und der *-Morphismus* π *wird meist mit der Darstellung identifiziert. Wir sagen also* π ist eine Darstellung von $\mathcal{A}$.

2.4.6. Beispiel. *Betrachten wir die Algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, *dann ist* $(\mathcal{H}, \mathbb{1})$ *selbstverständlich eine Darstellung von* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

2.4.7. Beispiel. *Eine andere Darstellung von* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ist* $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \pi)$ *mit* $\pi(\mathsf{A}) = \mathsf{A} \oplus \mathsf{A}$.

2.4.8. Beispiel. *Eine Darstellung der abelschen C*-Algebra* $\mathsf{C}_0(\mathsf{X})$ *(siehe 2.1.11) ist mit einem Maß* μ *auf* X *durch* $(\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, \mu), \pi)$ *und* $(\pi(\mathsf{f})\psi)(\mathsf{x}) = \mathsf{f}(\mathsf{x})\psi(\mathsf{x})$ *für alle* $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, \mu)$ *und alle* $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ *gegeben.*

2.4.9. Beispiel. *Betrachten wir erneut die Algebra* $\mathsf{C}_0(\mathsf{X})$ *und ein* $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$. *Dann ist* $(\mathbb{C}, \pi_\mathsf{x})$ *mit* $\pi_\mathsf{x}(\mathsf{f}) = \mathsf{f}(\mathsf{x})$ *eine Darstellung von* $\mathsf{C}_0(\mathsf{X})$.

2.4.10. Beispiel. *Sei* $\mathcal{A}$ *eine beliebige C*-Algebra und* $\mathcal{H}$ *ein beliebiger Hilbertraum, dann ist* $(\mathcal{H}, \pi)$ *mit* $\pi(\mathsf{A}) = 0$ *für alle* $\mathsf{A} \in \mathcal{A}$ *eine Darstellung. Sie heißt die* triviale *Darstellung über dem Darstellungsraum* $\mathcal{H}$.

2.4.11. Beispiel. *Sei* $(\mathcal{H}, \pi_1)$ *eine Darstellung der C*-Algebra* $\mathcal{A}$ *und* $\mathsf{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *ein unitärer Operator, dann ist* $(\mathcal{H}, \pi_2)$ *mit* $\pi_2(\mathsf{A}) = \mathsf{U}\pi_2(\mathsf{A})\mathsf{U}^*$ *ebenfalls eine Darstellung von* $\mathcal{A}$. *Die Darstellungen* $(\mathcal{H}, \pi_1)$ *und* $(\mathcal{H}, \pi_2)$ *heißen* unitär äquivalent, *oder in Symbolen* $\pi_1 \simeq \pi_2$.

Die wichtigsten Darstellungen sind treue Darstellungen, denn jede Darstellung definiert eine treue Darstellung der Quotientenalgebra $\mathcal{A}_\pi$. Die folgende Behauptung liefert Kriterien für diese Eigenschaft.

2.4.12. Behauptung. *Sei $(\mathcal{H},\pi)$ eine Darstellung der C*-Algebra $\mathcal{A}$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *π ist treu, das heißt* $\ker(\pi) = \{0\}$.

2. $\|\pi(A)\| = \|A\|$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$.

3. $\pi(A) > 0$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$ *mit* $A > 0$.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Da $\ker(\pi) = 0$ ist, können wir π^{-1} als *-Morphismus von $\pi(\mathcal{A})$ nach $\mathcal{A}$ durch $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ definieren. Aus Beh. 2.4.2 folgt daher: $\|A\| = \|\pi^{-1}(\pi(A))\| \le \|\pi(A)\| \le \|A\|$ und somit $\|\pi(A)\| = \|A\|$.

2. $\Rightarrow$ 3. $A > 0$ impliziert $\|A\| > 0$ und daher $\pi(A) \neq 0$. Andererseits folgt wegen 2.4.2 aus $A \ge 0$ die Ungleichung $\pi(A) \ge 0$. Zusammen ergibt dies $\pi(A) > 0$.

3. $\Rightarrow$ 1. Angenommen 1. ist nicht erfüllt, dann existiert ein $B \in \ker(\pi)$ mit $B \neq 0$. Also ist $\pi(B^*B) = \pi(B^*)\pi(B) = 0$. Andererseits ist $B^*B \ge 0$ und wegen $\|B^*B\| = \|B\|^2$ ist $B^*B \neq 0$. Dies wiederspricht jedoch $\pi(B^*B) = 0$. □

Wir wollen nun die Struktur von Darstellungen näher untersuchen. Hierfür ist es notwendig Teildarstellungen und direkte Summen von Darstellungen einzuführen.

2.4.13. Behauptung. *Sei $(\mathcal{H}_\alpha,\pi_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie (abzählbar oder überabzählbar) von Darstellungen der C*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann ist $(\mathcal{H},\pi)$ mit*

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha, \quad \pi := \bigoplus_{\alpha\in I} \pi_\alpha \tag{2.17}$$

eine Darstellung von $\mathcal{A}$, die die direkte Summe *der $(\mathcal{H}_\alpha,\pi_\alpha)$ genannt wird.*

Beweis: Trivial. □

2.4.14. Bemerkung. *Die direkte Summe $\bigoplus_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$ ist für eine überabzählbare Indexmenge I wie folgt definiert: $\mathfrak{F}(I)$ bezeichne die gerichtete Menge der endlichen Teilmengen von I. Dann ist*

$$\bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha := \{(\psi_\alpha)_{\alpha\in I} \mid \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{\alpha\in F} \|\psi_\alpha\| < \infty\} \tag{2.18}$$

und das Skalarprodukt ist durch

$$\langle(\psi_\alpha)_{\alpha\in I}, (\phi_\alpha)_{\alpha\in I}\rangle := \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{\alpha\in F} \langle\psi_\alpha, \phi_\alpha\rangle \tag{2.19}$$

gegeben. $\bigoplus_{\alpha\in I}\pi_\alpha$ hat dann die Form $\bigoplus_{\alpha\in I}\pi_\alpha((\psi_\alpha)_{\alpha\in I}) = (\pi_\alpha(\psi_\alpha))_{\alpha\in I}$.

2.4.15. Beispiel. *Betrachten wir erneut Beispiel 2.4.7. Offenbar ist $\pi = \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$.*

2.4.16. Beispiel. *Von ähnlicher Struktur ist die Darstellung $(\mathcal{H}^3,\pi)$ mit $\pi(A) = A \oplus A \oplus 0$ Es ist $\pi = \mathbb{1} \oplus \mathbb{1} \oplus 0$.*

2.4.17. Beispiel. *Eine Darstellung der abelschen Algebra $C_0(X)$ erhält man durch $\bigoplus_{x\in X}\pi_x$ (siehe 2.4.9). Diese Darstellung stimmt jedoch nicht mit 2.4.8 überein. Dies erkennt man daran, daß der Darstellungsraum in 2.4.8 separabel ist, die direkte Summe $\bigoplus_{x\in X}\mathbb{C}$ jedoch nicht.*

2.4.18. Behauptung. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra und $(\mathcal{H}, \pi)$ eine Darstellung. Ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ heißt* invarianter Teilraum *von $(\mathcal{H}, \pi)$, wenn alle Darsteller $\mathcal{F}$ auf sich abbilden.*

1. *Ist $\mathcal{F}$ ein invarianter Teilraum und bezeichnet $P_{\mathcal{F}}$ den Projektionsoperator auf $\mathcal{F}$, dann kommutiert $P_{\mathcal{F}}$ mit allen Darstellern, das heißt $\pi(A)P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}}\pi(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*

2. *Für jeden invarianten Teilraum ist $(\mathcal{F}, \pi \restriction \mathcal{F})$ mit $\pi \restriction \mathcal{F}(A) := \pi(A) \restriction \mathcal{F}$ eine Darstellung, welche* Teildarstellung *von $(\mathcal{H}, \pi)$ genannt wird.*

3. *Ist $\mathcal{F}$ ein invarianter Teilraum, dann ist auch das Orthokomplement $\mathcal{F}^\perp$ invariant und die Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ ist die direkte Summe der Teildarstellungen $(\mathcal{F}, \pi \restriction \mathcal{F})$ und $(\mathcal{F}^\perp, \pi \restriction \mathcal{F}^\perp)$.*

Beweis: Trivial. □

2.4.19. Beispiel. *Betrachten wir die C*-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und die Darstellung $(\mathcal{H}, \mathbb{1})$ die einzigen invarianten Teilräume sind $\mathcal{H}$ und $\{0\}$.*

2.4.20. Beispiel. *Betrachten wir erneut Beispiel 2.4.7. Diese Darstellung hat vier invariante Teilräume $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $\{0\}$, $\mathcal{H} \oplus \{0\}$, $\{0\} \oplus \mathcal{H}$. Daher existieren zwei nichttriviale Teildarstellungen: $\pi_1(A) = A \oplus 0$ auf dem Darstellungsraum $\mathcal{H} \oplus \{0\}$ und $\pi_2(A) = 0 \oplus A$ auf dem Darstellungsraum $\{0\} \oplus \mathcal{H}$.*

2.4.21. Beispiel. *Jeder Hilbertraum $\mathcal{H}_y = \{(z(x) \mid z(x) = 0 \ \forall x \neq y\} \subset \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}$ ist ein invarianter Teilraum der Darstellung $\bigoplus_{x \in X} \pi_x$ von $C_0(X)$ (siehe 2.4.17).*

2.4.22. Beispiel. *Betrachten wir die Darstellung $(L^2(X, \mu), \pi)$ von $C_0(X)$ aus Beispiel 2.4.8. Für jedes meßbare $F \subset X$ mit $\mu(F) \neq 0$ ist $\mathcal{H}_F := \{\psi \in L^2(X, \mu) \mid \psi(x) = 0$ f.ü. in $X \setminus F\}$ ein invarianter Teilraum.*

Das Studium von Darstellungen läßt sich mit den bereits eingeführten Begriffen auf das Studium *nicht degenerierter* Darstellungen zurückführen.

2.4.23. Definition. *Eine Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* degeneriert, *wenn ein invarianter Teilraum $\{0\} \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ existiert, so daß die zugehörige Teildarstellung trivial ist.*

2.4.24. Beispiel. *Die Darstellung aus 2.4.16 ist eine degenerierte Darstellung von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Eine degenerierte Darstellung läßt sich offenbar als direkte Summe einer nicht degenerierten und einer trivialen Darstellung schreiben. Das heißt es ist ausreichend nicht degenerierte Darstellungen zu untersuchen.

Die wichtigste Klasse nichtdegenerierter Darstellungen sind zyklische Darstellungen:

2.4.25. Definition. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra. Ein Tripel $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ heißt* zyklische Darstellung *von $\mathcal{A}$, wenn $(\mathcal{H}, \pi)$ eine Darstellung ist und wenn $\Omega \in \mathcal{H}$ zyklisch für π ist, das heißt $\{\pi(A)\Omega \mid A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{H}$ ist dicht.*

2.4.26. Beispiel. *Die Darstellung* $(\mathcal{H}, \mathbb{1})$ *von* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ist zyklisch für jedes* $\Omega \in \mathcal{H}$.

2.4.27. Beispiel. *Jedes* $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, \mu)$ *(siehe 2.4.8) welches fast überall ungleich Null ist, ist zyklischer Vektor der Darstellung* $(\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, \mu), \pi)$ *von* $\mathsf{C}_0(\mathsf{X})$ *aus 2.4.8.*

Zyklische Darstellungen erlauben nun die Struktur nicht degenerierter Darstellungen näher zu analysieren.

2.4.28. Behauptung. *Jede nicht degenerierte Darstellung* $(\mathcal{H}, \pi)$ *einer C*-Algebra* $\mathcal{A}$ *ist die direkte Summe zyklischer Darstellungen.*

Beweis: Sei $\{\Omega_\alpha \in \mathcal{H} \,|\, \Omega_\alpha \neq 0,\ \alpha \in I\} \subset \mathcal{H}$ eine Familie von Vektoren aus $\mathcal{H}$ die für alle Paare $\alpha \neq \beta$ und alle $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathcal{A}$ die Eigenschaft $\langle \pi(\mathsf{A})\Omega_\alpha, \pi(\mathsf{B})\Omega_\beta \rangle = 0$ hat. Setzen wir die Gültigkeit des Zornschen Lemmas voraus, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß diese Familie maximal ist. Wir definieren dann $\mathcal{H}_\alpha$ als den Normabschluß von $\{\pi(\mathsf{A})\Omega_\alpha \,|\, \mathsf{A} \in \mathcal{A}\}$. Die Teilräume $\mathcal{H}_\alpha$ sind paarweise orthogonal und wegen der Maximalität der Familie der Ω_α ist die direkte Summe der $\mathcal{H}_\alpha$ damit gleich $\mathcal{H}$. Mit der Definition $\pi_\alpha = \pi \upharpoonright \mathcal{H}_\alpha$ folgt die Behauptung. □

Diese Aussage reduziert also das Studium von Darstellungen auf zyklische Darstellungen, da sich alle anderen als direkte Summe von solchen (plus evt. ein trivialer Summand) ergeben.

Die letzte Klasse von Darstellungen die wir einführen wollen, sind irreduzible Darstellungen. Sie sind dadurch charakterisiert, daß sie sich nicht als direkte Summe von Teildarstellungen schreiben lassen.

2.4.29. Definition. *Eine Darstellung* $(\mathcal{H}, \pi)$ *heißt irreduzibel, wenn die einzigen invarianten, abgeschlossenen Teilräume* $\{0\}$ *und* $\mathcal{H}$ *sind.*

2.4.30. Beispiel. *Die Darstellung von* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *aus 2.4.6 und die Darstellungen* $(\mathbb{C}, \pi_x)$ *von* $\mathsf{C}_0(\mathsf{X})$ *aus 2.4.9 sind irreduzibel. Alle anderen Beispiele sind reduzibel. Insbesondere die Darstellung 2.4.8 ist ein Beispiel für eine zyklische und reduzible Darstellung.*

2.4.31. Bemerkung. *Die Begriff invarianter Teilraum, irreduzibel und zyklisch lassen auf natürliche Art auf beliebige Mengen* $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *von beschränkten Operatoren übertragen. Wir werden diese Begriffe in der folgenden Behauptung zusammen mit der* Kommutante

$$\mathcal{M}' := \{\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, [\mathsf{A}, \mathsf{B}] = 0\ \forall \mathsf{B} \in \mathcal{M}\} \tag{2.20}$$

benutzen, um zwei der wichtigsten Kriterien für Irreduzibilität anzugeben.

2.4.32. Behauptung. *Sei* $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *eine selbstadjungierte Menge, beschränkter Operatoren auf dem Hilbertraum* $\mathcal{H}$*, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\mathcal{M}$ *ist irreduzibel.*
2. $\mathcal{M}' = \mathbb{C}\mathbb{1}$.
3. *Jedes Element* $0 \neq \Omega \in \mathcal{H}$ *ist zyklisch für* $\mathcal{M}$.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 3. Angenommen es existiert ein $0 \neq \Omega \in \mathcal{H}$ welches nicht zyklisch ist, dann ist das Orthokomplement von $\{A\Omega \,|\, A \in \mathcal{M}\}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$ der weder mit $\{0\}$ noch mit $\mathcal{H}$ übereinstimmt. Da er jedoch zugleich ein invarianter Teilraum von $\mathcal{M}$ ist, ist dies ein Widerspruch zu 1.

3. $\Rightarrow$ 2. Sei $A \in \mathcal{M}'$, dann ist $AB - BA = 0$ für alle $B \in \mathcal{M}$ und somit $B^*A^* - A^*B^* = 0$ für alle $B \in \mathcal{M}'$. Da $\mathcal{M}$ nach Voraussetzung selbstadjungiert ist folgt $A^* \in \mathcal{M}$. Außerdem sind offenbar $A \pm A^*$ und $(A \pm A^*)/i$ Elemente von $\mathcal{M}'$. Das heißt wenn $\mathcal{M}' \neq \mathbb{C}\mathbb{1}$ ist, dann muß ein selbstadjungierter Operator $C \neq \lambda\mathbb{1}$ in $\mathcal{M}'$ existieren. Da C mit allen $B \in \mathcal{M}$ vertauscht, trifft dies auch auf alle Spektralprojektoren zu. Sei daher E ein solcher Projektor ($E \neq \mathbb{1}$ und $E \neq 0$) und $0 \neq \Omega \in \mathcal{H}$ mit $E\Omega = \Omega$. Dieses Ω kann jedoch kein zyklischer Vektor sein was 3. widerspricht.

2. $\Rightarrow$ 1. Angenommen $\mathcal{M}$ ist nicht irreduzibel, dann gibt es ein nichttrivialen Projektor E der mit allen Elementen aus $\mathcal{M}$ vertauscht. Dieser Projektor wäre dann aber ein Element der Kommutante was ein Widerspruch zu 2. ist. □

2.5 Zustände

Die Grundidee der algebraischen Quantentheorie ist es, wie wir zu Beginn dieses Kapitels bereits bemerkt haben, die Observablen eines Quantensystems durchs die selbstadjungierten Elemente einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ darzustellen. Um diesen Ansatz zu vervollständigen, müssen wir allerdings noch einen Weg finden, die Zustände des Systems zu beschreiben. Eine Möglichkeit wäre es hierfür eine Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ heranzuziehen und Zustände wie üblich durch Spurklasseoperatoren ρ auf $\mathcal{H}$ zu beschreiben. Würden wir dafür eine bestimmte Darstellung auszeichnen würde uns das zurück zum üblichen Hilbertraumformalismus der Quantentheorie führen. Ist die Darstellung dagegen beliebig, dann erhalten wir keinen vernünftigen Zustandsbegriff: In zwei verschiedenen Darstellungen $(\mathcal{H}, \pi_1)$, $(\mathcal{H}, \pi_2)$ kann einerseits ein Dichteoperator ρ zwei verschiedene Zustände beschreiben, andererseits zwei Dichteoperatoren ein und denselben Zustand. Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen ist es Erwartungswerte in diesen Zuständen zu vergleichen. Das heißt die Dichteoperatoren ρ_1, ρ_2 in den Darstellungen $(\mathcal{H}_1, \pi_1)$, $(\mathcal{H}_2, \pi_2)$ beschreiben genau dann den selben Zustand wenn die Funktionale $\mathcal{A} \ni A \mapsto \omega_1(A) := \mathrm{tr}(\rho_1\pi_1(A)) \in \mathbb{C}$ und $\mathcal{A} \ni A \mapsto \omega_2(A) := \mathrm{tr}(\rho_2\pi_2(A)) \in \mathbb{C}$ übereinstimmen. Dieser Ansatz jedoch macht die Darstellungen und die Dichteoperatoren völlig überflüssig: Ein Zustand ist dann eindeutig durch sein *Erwartungswertfunktional* $\omega := \omega_1 = \omega_2$ festgelegt.

Wir betrachten zu diesem Zweck den toplogischen Dualraum einer C*-Algebra $\mathcal{A}$, das heißt den Raum aller stetigen, linearen Funktionale $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ auf $\mathcal{A}$ mit der Norm $\|\omega\| = \sup_{\|A\|=1} |\omega(A)|$. Geeignete Kandidaten für Zustände sind nun die positiven, normierten Elemente von $\mathcal{A}^*$. Bevor wir diese Definition jedoch näher betrachten, ist es sinnvoll die folgende Beziehung zwischen Positivität und Stetigkeit zu betrachten:

2.5.1. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra mit Identität und $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein (nicht notwendiger Weise stetiges) lineares Funktional, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *ω ist* positiv*, das heißt $\omega(AA^*) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*

2. *$\omega \in \mathcal{A}^*$ und $\|\omega\| = \omega(\mathbb{1})$.*

Beweis: Siehe [BR79, Prop. 2.3.11]. □

2.5.2. Bemerkung. *Eine ähnliche Aussage gilt auch für C*-Algebren ohne Identität. Anstelle der $\mathbb{1}$ muß dann eine approximative Identität verwendet werden. Insbesondere folgt Steitgkeit auch ohne Existenz der Identität aus Positivität.*

Wir haben hier ein weiteres Beispiel für den Umstand, daß algebraische Eigenschaften, Ordnungseigenschaften und topologische Eigenschaften bei C*-Algebren eng miteinander verzahnt sind. Wir können daher definieren:

2.5.3. Definition. *Ein positives, lineares Funktional $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ auf der C*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* Zustand, *wenn $\|\omega\| = 1$ gilt. Die Menge aller Zustände wird mit $E_{\mathcal{A}}$ bezeichnet.*

Betrachten wir nun eine C*-Algebra $\mathcal{A}$ *ohne* Identität und die Algebra $\tilde{\mathcal{A}} := \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathcal{A}$ die wir durch hinzufügen einer solchen erhalten. Dann können wir jedes $\omega \in \mathcal{A}^*$ durch $\tilde{\omega}(\lambda\mathbb{1} + A) = \lambda\|\omega\| + \omega(A)$ zu einem Element $\tilde{\omega}$ von $\tilde{\mathcal{A}}^*$ fortsetzen. $\tilde{\omega}$ heißt die *kanonische Fortsetung* von ω. Es gilt die folgende Aussage [BR79, Cor. 2.3.13]:

2.5.4. Behauptung. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra ohne Identität und $\tilde{\mathcal{A}} := \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathcal{A}$ die Algebra wir durch hinzufügen einer solchen erhalten. Die kanonische Forsetzung $\tilde{\omega}$ eines positiven Funktionals $\omega \in \mathcal{A}^*$ ist positiv und es gilt $\|\omega\| = \|\tilde{\omega}\|$.*

2.5.5. Beispiel. *Betrachten wir zum Beispiel die C*-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der beschränkten Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann deifiniert jeder Spurklasseoperator ρ ein positives Funktional $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \omega_\rho(A) := \operatorname{tr}(\rho A) \in \mathbb{C}$ mit $\|\omega_\rho\| = \operatorname{tr}\rho$. Daher ist ω_ρ ein Zustand wenn ρ auf Eins normiert, also eine Dichtematrix ist.*

2.5.6. Beispiel. *Sei X wie in Bsp. 2.1.11 ein lokalkompakter Raum und $C_0(X)$ die in 2.1.11 definierte abelsche C*-Algebra. Dann definiert jedes endliche Maß μ durch $C_0(X) \ni f \mapsto \omega_\mu(f) := \int_X f(x)d\mu(x) \in \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional mit $\mu(X) = \|\omega_\mu\|$. Also ist ω_μ genau dann ein Zustand, wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.*

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2.5.1 ist, daß jede konvexe Linearkombination $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ zweier Zustände wieder ein Zustand ist, denn $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ ist offenbar positiv und daher $\|\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\| = \lambda_1\omega_1(\mathbb{1}) + \lambda_2\omega_2(\mathbb{1}) = 1$. Dies beweist offenbar die folgende Behauptung (für den Fall, daß $\mathcal{A}$ eine Identität besitzt; ansonsten kann in ähnlicher Weise mit einer approximativen Identität argumentiert werden; siehe [BR79, Cor. 2.3.12]).

2.5.7. Behauptung. *Die Menge $E_{\mathcal{A}}$ aller Zustände der C*-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{A}^*$.*

Auf der Menge der positiven Funktionale können wir nun, ähnlich wie auf der Menge der positiven Elemente von $\mathcal{A}$ durch: $\omega_1 \geq \omega_2 :\iff \omega_1 - \omega_2$ ist positiv, eine Ordnungrelation einführen. Wenn $\omega_1 \geq \omega_2$ gilt, dann sagen wir ω_1 *majorisiert* ω_2. Ein explizites Bespiel hierfür ist die konvexe Linearkombination $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ die offenbar sowohl $\lambda_1\omega_1$ als auch $\lambda_2\omega_2$ majorisiert. Diese Tatsache können wir benutzen um *reine* Zustände zu definieren; denn diese sollen sich gerade nicht als nichttriviale konvexe Linearkombination darstellen lassen.

2.5.8. Definition. *Ein Zustand ω auf der C*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* reiner Zustand, *wenn die einzigen positiven, linearen Funktionale die von ω majorisiert werden die Form $\lambda\omega$ mit $0 \le \lambda \le 1$ haben. Die Menge aller reinen Zustände auf $\mathcal{A}$ wird mit $P_{\mathcal{A}}$ bezeichnet.*

2.5.9. Beispiel. *Reine Zustände auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sind durch $A \mapsto \omega_\psi(A) := \langle\psi, A\psi\rangle$ und auf $C_0(X)$ durch Diracmaße $f \mapsto \omega_x(f) = f(x)$ gegeben.*

Eine wichtige Frage ist, ob auf jeder C*-Algebra Zustände existieren. Eine positive Antwort liefert das Hahn-Banach-Theorem.

2.5.10. Satz. *Zu jedem Element $A \in \mathcal{A}$ einer C*-Algebra existiert ein reiner Zustand ω mit $\omega(AA^*) = \|A\|^2$.*

Beweis: Wir wollen den Beweis kurz skizzieren (siehe auch [BR79, Lemma 2.3.23]). Wir nehmen hierfür an, daß $\mathcal{A}$ eine Identität besitzt (ansonsten fügen wir eine hinzu) und den Teilraum $\mathcal{B} := \{\alpha\mathbb{1} + \beta AA^* \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ definieren. Auf $\mathcal{B}$ ist dann durch $\phi(\alpha\mathbb{1} + \beta AA^*) := \alpha + \beta\|A\|^2$ ein steitges lineares Funktional auf $\mathcal{B}$ gegeben. Es läßt sich nun zeigen, daß $\|\phi\| = \phi(\mathbb{1}) = 1$ ist. Aufgrunds des Hahn-Banach-Theorems existiert nun eine stetige Fortsetzung ω von ϕ auf ganz $\mathcal{A}$ so daß $\|\omega(\mathbb{1})\| = \|\omega\| = \|\phi\| = 1$ ist. Mit Satz 2.5.1 folgt daß ω positiv und somit ein Zustand ist. Bleibt zu zeigen daß ω rein ist, wofür ich auf den Beweis in [BR79, Lemma 2.3.23] verweisen möchte. □

Eine Aussage, die mit ähnlichen Methoden bewiesen werden kann, ist die folgende:

2.5.11. Behauptung. *Sei $\mathcal{B}$ eine C*-Teilalgebra der C*-Algebra $\mathcal{A}$ und ω ein Zustand auf $\mathcal{B}$. Dann kann ω zu einem Zustand $\hat{\omega}$ auf $\mathcal{A}$ fortgesetzt werden. Ist ω rein, dann kann auch $\hat{\omega}$ rein gewählt werden.*

Beweis: [BR79, Prop. 2.3.24] □

Zum Ende dieses Abschnittes soll noch eine Aussage über die Struktur der Mengen $E_{\mathcal{A}}$ und $P_{\mathcal{A}}$ gemacht werden. Hierfür ist zu bemerken, daß neben der Normtopologie auf $\mathcal{A}^*$ auch die *schwach*-Topologie* existiert. Sie ist durch die folgenden Umgebungsbasen definiert:

$$\mathcal{U}(\omega; A_1, \ldots, A_n; \epsilon) := \{\omega' \in \mathcal{A}^* \,|\, |\omega(A_i) - \omega'(A_i)| \le \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}. \qquad (2.21)$$

2.5.12. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra und $B_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^*$ die Menge der positiven, linearen Funktionale deren Norm kleiner oder gleich Eins ist.*

1. *$B_{\mathcal{A}}$ ist eine konvexe, schwach*-kompakte Teilmenge von $\mathcal{A}^*$ deren extremale Punkte die Null und die reinen Zustände sind.*

2. *Die Menge $E_{\mathcal{A}}$ der Zustände ist ebenfalls konvex (wie bereits in Prop. 2.5.7 gesehen) jedoch nur dann schwach*-kompakt wenn $\mathcal{A}$ eine Identität enthält.*

3. *In diesem Falle sind die reinen Zustände die Extremalpunkte von $E_{\mathcal{A}}$ und $E_{\mathcal{A}}$ ist der schwach*-Abschluß der konvexen Hülle von $P_{\mathcal{A}}$.*

Beweis: [BR79, Thm. 2.3.15] □

2.6 Die GNS-Konstruktion

Wir haben zu Beginn des letzten Abschnittes die Möglichkeit erwähnt, Zustände auf einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ durch normierte Vektoren $\Omega \in \mathcal{H}$ in einer Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ zu definieren. Das entsprechende positive, lineare Funktional ist dann durch $\omega_\Omega(A) = \langle \Omega, \pi(A)\Omega \rangle$ definiert. Es stellt sich nun die Frage, ob *jeder* Zustand diese Form hat. Ihre Beantwortung führt zur *GNS-Konstruktion* die wir nun betrachten wollen.

2.6.1. Lemma. *Für jedes positive lineare Funktional ω auf einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ gilt*

1. $\omega(A * B) = \overline{\omega(B^*A)}$ *für alle* $A, B \in \mathcal{A}$.

2. $|\omega(A^*B)|^2 \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B)$ *für alle* $A, B \in \mathcal{A}$ *(„Cauchy-Schwartz-Ungleichung")*

3. $|\omega(A^*BA)| \leq \omega(A^*A)\|B\|$ *für alle* $A, B \in \mathcal{A}$

Beweis: Sei $A, B \in \mathcal{A}$ dann ist wegen der Positivität von ω durch $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \omega((\lambda A + B)^*(\lambda A + B)) \in \mathbb{C}$ eine positive quadratische Form gegeben. Das heißt es muß

$$q(\lambda) := |\lambda|^2\omega(A^*A) + \bar{\lambda}\omega(A^*B) + \lambda\omega(B^*A) + \omega(B^*B) \geq 0 \tag{2.22}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten. Insbesondere muß $q(\lambda) \in \mathbb{R}$ sein, das heißt der Imaginärteil von $\bar{\lambda}\omega(A^*B) + \lambda\omega(B^*A) \in \mathbb{R}$ muß verschwinden. Dies bedeutet jedoch $\lambda(\omega(A^*B) - \overline{\omega(B^*A)}) + \bar{\lambda}(\omega(B^*A) - \overline{\omega(A^*B)}) = 0$. Da λ beliebig ist folgt 1. Die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung folgt nun für $\omega(A^*A) \neq 0$ indem wir $\lambda = -\omega(A^*B)/\omega(A^*A)$ setzen. Im Falle $\omega(A^*A) = 0, \omega(B^*B) \neq 0$ folgt die Aussage, indem wir die Rollen von A und B vertauschen. Gilt $\omega(A^*A) = 0$ und $\omega(B^*B) = 0$ dann liefert $\lambda = -\omega(A^*B)$ die Beziehung $-2|\omega(A^*B)|^2 \geq 0$ was $\omega(A^*B) = 0$ impliziert.

Damit bleibt die Aussage 3 zu beweisen. Aus 2. folgt $|\omega(A^*BA)|^2 \leq \omega(A^*A)\omega(A^*B^*BA)$. Daher folgt 3. aus der Ungleichung $A^*B^*BA \leq \|B\|^2 A^*A$ welche wiederum aus Behauptung 2.3.13(3) folgt, da $\|B\|^2\mathbb{1} - B^*B \geq 0$ ist ($\|B^*B\| = \|B\|^2$, das Spektrum von B^*B ist in $[0, \|B\|^2]$ enthalten also $\sigma(\|B\|^2\mathbb{1} - B^*B) \subset \{\|B\|^2 - \lambda \,|\, \lambda \in [0, \|B\|^2]\} = [0, \|B\|^2]$). □

2.6.2. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra und $\omega \in E_{\mathcal{A}}$, dann existiert eine bis auf Unitäräquivalenz eindeutige zyklische Darstellung $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, die* GNS-Darstellung *bzgl. ω, so daß $\omega(A) = \langle \Omega_\omega, \pi(A)\Omega_\omega \rangle$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.*

Beweis: Wir betrachten zunächst die Menge

$$\mathcal{J}_\omega := \{A \in \mathcal{A} \,|\, \omega(A^*A) = 0\}. \tag{2.23}$$

$\mathcal{J}_\omega$ ist offenbar ein linearer Teilraum von $\mathcal{A}$ und wegen $\omega((BA)^*(BA)) = \omega(A^*B^*BA) \leq \|B\|^2\omega(A^*A)$ (siehe 2.6.1(3)) ist $\mathcal{J}_\omega$ sogar ein linksseitiges Ideal. Wir betrachten daher auf den Quotientenraum $\mathcal{A}/\mathcal{J}_\omega$ den Ausdruck $\langle [A], [B] \rangle := \omega(A^*B)$, der von den Repräsentanten A, B der Äquivalenzklassen $[A], [B] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}_\omega$ unabhängig ist. Dies folgt mit $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_\omega$ durch:

$$\begin{aligned}\omega((A+I_1)^*(B+I_2)) = \omega(A^*B) + \overline{\omega(B^*I_1)} + \omega(A^*I_2) + \omega(I_1^*I_2) = \\ = \omega(A^*B). \quad (2.24)\end{aligned}$$

Denn die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung impliziert z.B. $|\omega(B^*I_1)| \leq \omega(B^*B)\omega(I_1^*I_1) = 0$ da $I_1 \in \mathcal{I}_\omega$. Die Funktion $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ definiert daher ein Skalarprodukt welches $\mathcal{A}/\mathcal{I}_\omega$ zum Prähilbertraum macht. Seine Vervollständigung bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_\omega$.

Jedes $A \in \mathcal{A}$ definiert nun auf $\mathcal{A}/\mathcal{I}_\omega$ die lineare Abbildung $\pi_\omega(A)[B] = [AB]$. Da $\mathcal{I}_\omega$ ein linksseitiges Ideal ist, ist $\pi_\omega(A)$ wohldefiniert. Außerdem gilt

$$\|\pi_\omega(A)[B]\|^2 = \langle [AB], [AB]\rangle = \omega(B^*A^*AB) \leq \|A\|^2\omega(B^*B) = \|A\|^2\|[B]\|^2. \quad (2.25)$$

Daher ist $\pi_\omega(A)$ beschränkt und kann zu einem beschränkten Operator auf ganz $\mathcal{H}_\omega$ ausgedehnt werden. Die Darstellungseigenschaften der Abbildung π_ω folgen unmittelbar aus der Definition; z.B. $\pi_\omega(A)\pi_\omega(B)[C] = [ABC] = \pi_\omega(AB)[C]$.

Damit haben wir eine Darstellung $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega)$ von $\mathcal{A}$ definiert und es fehlt nur noch der zyklische Vektor. Wir wollen hierfür annehmen, daß $\mathcal{A}$ eine Identität enthält. Dann können wir $\Omega_\omega := [\mathbb{1}]$ betrachten. Offenbar hat jedes $[A] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}_\omega$ die Form $[A] = \pi_\omega(A)\Omega_\omega$ weshalb Ω_ω zyklisch ist. Falls $\mathcal{A}$ keine Identität besitzt, können wir eine hinzufügen und die soeben vorgestellte Konstruktion für $\mathcal{A} + \mathbb{C}\mathbb{1}$ durchführen. In diesem Falle wird allerdings ein zusätzliches Argument für die Zyklizität benötigt, welches bitte [BR79, Thm. 2.3.16] zu entnehmen ist (dort wird eine approximative Identität verwendet, die wir in dieser Vorlesung nicht betrachtet haben).

Damit verbleibt die Eindeutigkeit bis auf Unitäräquivalenz. Sei daher $(\mathcal{H}'_\omega, \pi'_\omega, \Omega'_\omega)$ eine weitere zyklische Darstellung von $\mathcal{A}$, die die Eigenschaft $\omega(A) = \langle\Omega'_\omega, \pi'_\omega(A)\Omega'_\omega\rangle$ besitzt, dann definieren wir $U\pi_\omega(A)\Omega_\omega := \pi'_\omega(A)\Omega'_\omega$. Offenbar ist

$$\begin{aligned}\langle U\pi_\omega(A)\Omega_\omega, U\pi_\omega(B)\Omega_\omega\rangle &= \langle \pi'_\omega(A)\Omega'_\omega, \pi'_\omega(B)\Omega'_\omega\rangle & (2.26)\\ &= \langle \Omega'_\omega, \pi'_\omega(A^*B)\Omega'_\omega\rangle & (2.27)\\ &= \omega(A^*B) = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A^*B)\Omega_\omega\rangle & (2.28)\\ &= \langle \pi_\omega(A)\Omega_\omega, \pi_\omega(B)\Omega_\omega\rangle. & (2.29)\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die Umkehrabbildung $U^{-1}\pi'_\omega(A)\Omega'_\omega = \pi_\omega(A)\Omega_\omega$. Daher ist U zu einem unitären Operator von $\mathcal{H}'_\omega$ nach $\mathcal{H}_\omega$ fortsetzbar, für den gilt:

$$U\pi'_\omega(A)U^* = \pi_\omega(A) \text{ und } U\Omega'_\omega = \Omega_\omega. \quad (2.30)$$

Mit anderen Worten: die Darstellungen $(\mathcal{H}'_\omega, \pi'_\omega, \Omega'_\omega)$ und $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ sind unitär äquivalent. $\square$

2.6.3. Beispiel. *Sei* $\mathcal{A} = M(2,\mathbb{C})$ *und* $\omega(A) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$. *Dann gilt*

$$M(2,\mathbb{C}) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \bar{a}b + \bar{c}d \\ \bar{b}a + \bar{d}c & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Daher ist $\omega(A^*A) = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)$ *und somit* $\omega(A^*A) = 0 \iff A = 0$ *mit anderen Worten:* $\mathcal{I}_\omega = \{0\}$ *und* $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{A} = M(2,\mathbb{C})$*. Identifizieren wir nun* $M(2,\mathbb{C})$ *vermöge der unitären Abbildung*

$$\mathbb{C}^4 \ni (x^1, x^2, x^3, x^4) \mapsto \begin{pmatrix} x^1 & x^3 \\ x^2 & x^4 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) \tag{2.32}$$

mit dem Hilbertraum[2] $(\mathbb{C}^4, \frac{1}{2}\langle\cdot,\cdot\rangle)$*, dann ergibt sich für* $\mathbb{C}^4 \ni x := (x^1, x^2, x^3, x^4)$*:*

$$\begin{aligned}\pi_\omega(A)x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 & x^3 \\ x^2 & x^4 \end{pmatrix} \\ = (ax^1 + bx^2, cx^1 + dx^2, ax^3 + bx^4, cx^3 + dx^4).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Mit anderen Worten $\pi_\omega(A) = A \oplus A$*. Der zyklische Vektor schließlich ist* $\Omega_\omega = (1,0,0,1)$*, denn offenbar ist mit* $e_1 = (1,0)$ *und* $e_2 = (0,1)$

$$\frac{1}{2}\langle\Omega_\omega, A \oplus A\Omega_\omega\rangle = \frac{1}{2}\langle e_1, Ae_1\rangle + \frac{1}{2}\langle e_2, Ae_2\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A = \omega(A). \tag{2.34}$$

Wir möchten an dieser Stelle bemerken, daß ω *in der Darstellung* π_ω *natürlich ein Vektorzustand ist (so ist* π_ω *ja gerade gemacht) jedoch kein reiner Zustand. Aus diesem Grunde „verdoppelt" sich der ursprüngliche Hilbertraum* $\mathbb{C}^2$ *zum* $\mathbb{C}^4$*.*

Eine unmittelbare Folge des letzten Satzes ist das folgende Korollar:

2.6.4. Korollar. *Sei* ω *ein Zustand auf der C*-Algebra* $\mathcal{A}$ *und* $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *ein Automorphismus der* ω *invariant läßt, d.h.* $\omega(\alpha(A)) = \omega(A)$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$*. Dann existiert ein eindeutiger unitärer Operator auf dem Hilbertraum* $\mathcal{H}_\omega$*, so daß* $U\pi_\omega(A)U^* = \pi_\omega(\alpha(A))$ *und* $U\Omega_\omega = \Omega_\omega$ *gilt (d.h.* α *ist* unitär implementierbar*).*

Beweis: Offenbar ist $\pi(A) = \pi_\omega(\alpha(A))$ eine Darstellung für die $\omega(A) = \langle\Omega_\omega, \pi(A)\Omega_\omega\rangle$ gilt. Daher folgt die Aussage aus der Eindeutigkeit der GNS-Darstellung. □

Ein wichtige Aussage ist schließlich die nun folgende Beziehung zwischen reinen Zuständen und irreduziblen Darstellungen.

2.6.5. Satz. *Ein Zustand* ω *auf der C*-Algebra* $\mathcal{A}$ *ist genau dann ein reiner Zustand, wenn seine GNS-Darstellung irreduzibel ist.*

Beweis: Siehe [BR79, 2.3.19]. □

Eine wichtige Konsequenz der GNS-Konstruktion ist die Existenz von Darstellungen, denn wir haben in Satz 2.5.10 gesehen, daß auf jeder C*-Algebra Zustände existieren. Wir können sogar weiter gehen und die folgende zentrale Strukturaussage beweisen:

2.6.6. Satz. *Jede C*-Algebra ist *-isomorph zu einer normabgeschlossenen, selbstadjungierten Algebra beschränkter Operatoren auf einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$*.*

[2] $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet dabei daß übliche Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^4$; der Faktor $\frac{1}{2}$ ist notwendig wegen $\langle A, A\rangle = \omega(A^*A) = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|)$

Beweis: Wir betrachten für jeden Zustand ω auf $\mathcal{A}$ die GNS-Darstellung $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ und bilden deren direkte Summe

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\omega \in E_{\mathcal{A}}} \mathcal{H}_\omega, \quad \pi = \bigoplus_{\omega \in E_{\mathcal{A}}} \pi_\omega. \tag{2.35}$$

Aus Satz 2.5.10 folgt für jedes $A \in \mathcal{A}$ die Existenz eines ω mit $\omega(A^*A) = \|A\|^2$. Daher ist

$$\|A\|^2 = \omega(A^*A) = \|\pi_\omega(A)\Omega_\omega\|^2 \leq \|\pi_\omega(A)\|^2 \leq \|A\|^2 \tag{2.36}$$

also $\|\pi_\omega(A)\|^2 = \|A\|^2$. Daher gilt $\|A\| \geq \|\pi(A)\| \geq \|A\|$ und damit ist π eine treue Darstellung (siehe Behauptung 2.4.12). □

2.7 Abelsche C*-Algebren

Am Schluß dieses Kapitels wollen wir schließlich noch die Struktur abelscher C*-Algebren betrachten. Die zentrale Aussage dieses Abschnittes ist daß alle abelschen C*-Algebren die Form $C_0(X)$ mit einem lokalkompakten Raum X besitzen (siehe Bsp. 2.1.11). Der erste Schritt ist die Definition des *Spektrums* einer abelschen C*-Algebra.

2.7.1. Definition. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche C*-Algebra. Ein Charakter ω von $\mathcal{A}$ ist eine nichtverschwindende lineare Abbildung $\mathcal{A} \ni A \mapsto \omega(A) \in \mathbb{C}$ die die Eigenschaft $\omega(AB) = \omega(A)\omega(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ besitzt. Die Menge aller Charaktere von $\mathcal{A}$ heißt das* Spektrum $\sigma(\mathcal{A})$ *von $\mathcal{A}$.*

2.7.2. Behauptung. *Die Charaktere einer abelschen C*-Algebra $\mathcal{A}$ stimmen mit deren reinen Zuständen überein.*

Beweis: Wir wollen für den Beweis annehmen, daß $\mathcal{A}$ eine Identität enthält (siehe [BR79, Prop. 2.3.27] für den allgemeinen Fall). Sei $\omega \in \sigma(\mathcal{A})$. Dann ist $\omega(A) = \omega(A\mathbb{1}) = \omega(A)\omega(\mathbb{1})$. Da mindestens ein A mit $\omega(A) \neq 0$ existiert folgt $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Sei nun $\lambda \notin \sigma(A)$. Dann existiert ein $B \in \mathcal{A}$ mit $(\lambda\mathbb{1} - A)B = \mathbb{1}$. Daher ist $\omega(\lambda\mathbb{1} - A)\omega(B) = 1$ also $(\lambda - \omega(A))\omega(B) = 1$ und daher $\lambda \neq \omega(A)$. Das zeigt, daß $\omega(A) \in \sigma(A)$ ist und daher $|\omega(A)| \leq \rho(A) = \|A\|$ gilt (also ist ω stetig). Ebenso folgt $\omega(A^*A) \geq 0$ da das Spektrum von A^*A positiv ist. Also ist ω ein Zustand.

Bleibt zu zeigen, daß ω ein reiner Zustand ist. Wir betrachten zu diesem Zweck die GNS-Darstellung von ω. Es muß offenbar

$$\langle \pi_\omega(A^*)\Omega_\omega, \pi_\omega(B)\Omega_\omega \rangle = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(B)\Omega_\omega \rangle \tag{2.37}$$

gelten. Angenommen die Dimension von $\mathcal{H}_\omega$ ist größer als Eins, dann gibt es ein $\psi \in \mathcal{H}_\omega$ so daß $\langle \psi, \pi_\omega(B)\Omega_\omega \rangle = 0$ ist. Daher existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ so daß $\|\pi_\omega(A_\epsilon^*)\Omega_\omega - \psi\| \geq \epsilon / \|B\|$ gilt. Dies impliziert jedoch

$$\begin{aligned} |\langle \pi(A_\epsilon^*)\Omega_\omega, \pi_\omega(B)\Omega_\omega \rangle| &= |\langle \psi, \pi_\omega(B)\Omega_\omega \rangle - \langle (\psi - \pi(A_\epsilon^*)\Omega_\omega), \pi_\omega(B)\Omega_\omega \rangle| = \\ &= |\langle (\psi - \pi(A_\epsilon^*)\Omega_\omega), \pi_\omega(B)\Omega_\omega \rangle| \leq \|\psi - \pi_\omega(A_\epsilon^*)\| \|B\| = \epsilon. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Daher existiert ist $\langle\Omega_\omega,\pi_\omega(A_\epsilon)\Omega_\omega\rangle\langle\Omega_\omega,\pi_\omega(B)\Omega_\omega\rangle < \epsilon$. Mit $\omega(B) \neq 0$ folgt daraus, daß $\omega(A_\epsilon)$ gegen Null konvergieren muß. Dies jedoch heißt daß $\omega(A_\epsilon CB) = \langle\pi_\omega(A_\epsilon^*)\pi_\omega(C^*)\Omega_\omega,\pi_\omega(B)\Omega_\omega\rangle$ für alle $B, C \in \mathcal{A}$ gegen Null konvergiert. Da Ω_ω zyklischer Vektor ist folgt daraus $\pi_\omega(A_\epsilon)$ gegen Null für $\epsilon \to 0$. Dies wiederspricht jedoch der Annahme daß $\pi_\omega(A_\epsilon^*)\Omega_\omega$ für $\epsilon \to 0$ gegen $\psi \neq 0$ konvergiert. Also ist $\dim \mathcal{H}_\omega = 1$ und π_ω damit irreduzibel. Mit Satz 2.6.5 folgt daher daß ω ein reiner Zustand ist.

Sei ω nun ein reiner Zustand, dann ist wie soeben bemerkt π_ω irreduzibel und wegen Beh. 2.4.32 gilt für die Kommutante $\pi_\omega(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$. Da $\mathcal{A}$ jedoch abelsch ist folgt $\pi_\omega(\mathcal{A}) \subset \pi_\omega(\mathcal{A})' = \mathbb{C}$ dies ist jedoch nur möglich wenn $\mathcal{H}_\omega$ eindimensional ist. Dann aber faktorisiert ω. $\square$

Da das Spektrum von $\mathcal{A}$ eine Teilmenge des Dualraumes $\mathcal{A}^*$ ist, können wir auf $\sigma(\mathcal{A})$ die Spurtopologie bzgl. der Schwach*-Topologie betrachten. Es gilt dann der folgende Satz:

2.7.3. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche C*-Algebra und X die Menge aller Charaktere zusammen mit der Spurtopologie bzgl. der Schwach*-Topologie auf $\mathcal{A}^*$,*

1. *dann ist X ein lokalkompakter, hausdorffscher, topologischer Raum.*

2. *X ist genau dann kompakt, wenn $\mathcal{A}$ eine Identität besitzt.*

3. *Durch $\mathcal{A} \ni A \mapsto \hat{A} \in C_0(X)$ mit $\hat{A}(\omega) = \omega(A)$ ist ein *-Isomorphismus gegeben (vergl. Bsp. 2.1.11), der* Gelfandtransformation *genannt wird.*

Beweis: Zu 1. Sei $\omega_0 \in X$, dann existiert ein $A \in \mathcal{A}_+$ mit $\omega_0(A) > 0$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $\omega(A) > 1$ ist. Daher ist die Menge $K = \{\omega \,|\, \omega \in X, \omega(A) > 1\}$ eine offene Umgebung von ω_0. Der Abschluß von K ist in $\{\omega \,|\, \omega \in X, \omega(A) \leq 1\}$ enthalten, denn für jedes Netz $(\omega_i)_{i\in I}$ von Elementen aus K gilt offenbar $(\lim_{i\in I}\omega_i)(AB) = \lim_{i\in I}\omega_i(A)\lim_{i\in I}\omega_i(B)$ und $\lim_{i\in I}\omega_i(A) \geq 1$. Da alle Charaktere Zustände sind ist also $\bar{K} \subset B_\mathcal{A}$ der Einheitskugel in $\mathcal{A}^*$, die wegen Satz 2.5.12 kompakt ist. Also ist $\bar{K}$ eine kompakte Umgebung von ω_0.

Zu 3. Durch $\hat{A}$ ist auf X eine komplexwertige Funktion gegeben, die aufgrund der Definition der Schwach*-Topologie offenbar steitg ist. Außerdem folgt ebenso wie im vorstehenden Absatz, daß die Menge $\{\omega \in X \,|\, \omega(A) \geq \epsilon\}$ kompakt ist. Daher ist $\hat{A} \in C_0(X)$.

Die Abbildung $\mathcal{A} \ni A \mapsto \hat{A} \in C_0(X)$ die somit gegeben ist, ist offenbar ein Morphismus. Wegen des Satzes 2.5.10 ist sogar

$$\|\hat{A}\|^2 = \sup_{\omega\in X}|\hat{A}(\omega)|^2 = |\widehat{A^*A}(\omega)| = \|A\|^2 \tag{2.39}$$

und daher ist mit Behauptung 2.4.12 die Abbildung $A \mapsto \hat{A}$ ein Isomorphismus auf ihr Bild.

Damit bleibt zu zeigen, daß das Bild dieser Abbildung ganz $C_0(X)$ ist. Die Funktionen $\hat{A}$ mit $A \in \mathcal{A}$ separieren die Elemente von X: Wenn $\omega_1 \neq \omega_2$ dann gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\omega_1(A) \neq \omega_2(A)$ also $\hat{A}(\omega_1) \neq \hat{A}(\omega_2)$. Aufgrund des Approximationssatzes von Stone und Weierstraß ist $\{\hat{A} \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ dicht in $C_0(X)$. Und da $A \mapsto \hat{A}$

wie soeben gesehen ein Isomorphismsus ist, ist $\{\hat{A} \mid A \in \mathcal{A}\}$ abgeschlossen, stimmt also mit $C_0(X)$ überein.

Zu 2. Wenn X kompakt ist, dann ist die Funktion $X \ni \omega \mapsto 1 \in \mathbb{C}$ ein Element von $C_0(X)$. Wegen Behauptung 3 ist daher eine Identität in $\mathcal{A}$. Sei nun andersherum angenommen, daß $\mathcal{A}$ eine Identität enthält, dann gilt für alle $\omega \in X$ die Ungleichung $\omega(2\mathbb{1}) \geq 1$. Daher zeigt eine ähnliche Argumentation wie für Behauptung 1 daß X kompakt ist. $\square$

Kapitel 3

Von Neumannalgebren

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, daß jede C*-Algebra als Algebra beschränkter Operatoren auf einem Hilbertraum dargestellt werden kann. Diese Algebra ist dabei abgeschlossen in der Normtopologie. In vielen Situation jedoch ist sinnvoll, die Operatoralgebra in einer anderen Topologie abzuschließen. Dies führt zum Begriff der von Neumann Algebra.

3.1 Topologien auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Wir beginnen mit einer Übersicht über alle Topologien die wir für diesen Zweck betrachten wollen. Es handelt sich dabei um lokalkonvexe Topologien die von Familien von Halbnormen erzeugt werden. Wir erinnern daher zunächst an die Definition eines lokalkonvexen Raumes.

3.1.1. Definition. *Sei V ein komplexer (reeller) Vektorraum, dann heißt ein Funktional $p : V \to \mathbb{R}$ eine* Halbnorm*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $p(x) \geq 0$ *für alle* $x \in V$.
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *(*$\lambda \in \mathbb{R}$*) und* $x \in V$.
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *für alle* $x, y \in V$.

3.1.2. Definition. *Ein komplexer (reeller) Vektorraum V zusammen mit einer Familie $(p_i)_{i \in I}$ von Halbnormen heißt* lokalkonvexer Raum*. Die* lokalkonvexe Topologie *von V ist dabei durch die Umgebungsbasen ($\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$)*

$$U(x; p_1, \ldots, p_n; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) := \{y \in V \,|\, p_1(x - y) < \epsilon_1, \ldots, p_n(x - y) < \epsilon_n\} \quad (3.1)$$

gegeben.

Ein lokalkonvexer Raum ist ein topologischer Vektorraum, das heißt die durch die Halbnormen definierte Topologie ist mit der Vektorraumstruktur verträglich. Außerdem ist ein lokalkonvexer Raum uniformisierbar, mit anderen Worten der Begriff der Vollständigkeit ist definiert. Schließlich ist noch zu bemerken, daß ein lokalkonvexer Raum genau dann hausdorffsch ist wenn $p_i(x) = 0$, $\forall x \in V$ äquivalent zu $x = 0$ ist.

Wir wenden uns nun lokalkonvexen Topologien auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ zu. Zunächst die starke und die σ-starke Topologie.

3.1.3. Definition. *Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Algebra der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$.*

1. *Die* starke *Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist durch die Familie $p_\psi(A) = \|A\psi\|$, $\psi \in \mathcal{H}$ von Halbnormen definiert.*

2. *Der Definition der $\sigma-$*starken *Topologie dienen die durch $p_{\psi_n, n\in\mathbb{N}}(A) = (\sum_{n=1}^{\infty} \|A\psi_n\|^2)^{1/2}$ definierten Halbnormen, wobei $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\mathcal{H}$ ist, für die $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n|^2 < \infty$ ist.*

Wie bereits bemerkt ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ in dieser Topologie ein topologischer Vektorraum. Die Multiplikation ist nicht stetig. Es gilt nur noch die folgende Aussage.

3.1.4. Behauptung. *Betrachte einen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und auf der Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die starke bzw. σ-starke Topologie, dann gilt:*

1. *Die σ-starke Topologie ist feiner als die starke Topologie.*

2. *Beide Topologien stimmen auf der Einheitskugel $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ überein.*

3. *$\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ ist in der durch diese Topologien definierten uniformen Struktur vollständig.*

4. *Die Abbildung $\mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni (a, b) \mapsto AB \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist stetig in beiden Topologien.*

5. *Die Multiplikation ist jedoch nur dann auf ganz $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$ stetig, wenn $\mathcal{H}$ endlich dimensional ist.*

6. *Die Abbildung $A \mapsto A^*$ ist nicht stetig.*

Beweis: [BR79, Prop. 2.4.1]. □

Als nächstes wenden wir uns der schwachen bzw. σ-schwachen Topologie zu:

3.1.5. Definition. *Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Algebra der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$.*

1. *Die* schwache *Topologie wird durch die Familie $p_{\psi,\phi}(A) := |\langle\psi, A\phi\rangle|$, $\leq, \phi \in \mathcal{H}$*

2. *und die σ-*schwache *durch $p_{\psi_n,\phi_n,n\in\mathbb{N}}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle\psi_n, A\phi_n\rangle|$, $\psi_n, \phi_n \in \mathcal{H}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n\|^2 < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \|\phi_n\|^2 < \infty$ definiert.*

Ähnlich wie für die starke und die σ-starke Topologie erhalten wir die Aussage:

3.1.6. Behauptung. *Betrachte einen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und auf der Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die schwache bzw. σ-schwache Topologie, dann gilt:*

1. *Die σ-schwache Topologie ist feiner als die schwache Topologie.*

2. *Beide Topologien stimmen auf $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ überein.*

3. *$\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ ist kompakt in beiden Topologien.*

4. *Die Abbildungen* $A \mapsto AB$, $A \mapsto BA$ *und* $A \mapsto A^*$ *sind stetig.*

5. *Die Multiplikation ist als Abbildung auf* $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *nur dann stetig wenn* $\mathcal{H}$ *endlich dimensional ist.*

Beweis: [BR79, Prop. 2.4.2] □

Schließlich gibt es noch die stark* und σ-stark* Topologien.

3.1.7. Definition. *Sei* $\mathcal{H}$ *ein komplexer Hilbertraum und* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *die Algebra der beschränkten Operatoren auf* $\mathcal{H}$.

1. *Die* stark* *Topologie auf* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *wird durch die Familie* $p^*_\psi(A) := \|A\psi\| + \|A^*\psi\|$, $\psi \in \mathcal{H}$

2. *und die* σ-stark* *Topologie durch die Familie* $p^*_{\psi_n, n\in\mathbb{N}}(A) := (\sum_{n=1}^{\infty} \|A\psi_n\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|A\psi_n\|^2)^{1/2}$, $\psi_n \in \mathcal{H}$ *mit* $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi\|^2 < \infty$ *von Halbnormen definiert.*

Der wesentliche Unterschied zwischen starker Topologie und stark* Topologie ist die Stetigkeit von $A \mapsto A^*$ in letzterer. Ansonsten gelten alle Aussagen aus Behauptung 3.1.4.

Fassen wir nun nocheinmal alle behandelten Topologien im Überblick zusammen.

$$\begin{tikzcd}
\text{Norm} \arrow[r, equal] & \text{Norm} \arrow[r, equal] & \text{Norm} \\
\sigma\text{-stark}^* \arrow[u] & \sigma\text{-stark} \arrow[l] \arrow[u] & \sigma\text{-schwach} \arrow[l] \arrow[u] \\
\text{stark}^* \arrow[u] & \text{stark} \arrow[l] \arrow[u] & \text{schwach} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dabei bedeutet der Pfeil ← "ist feiner als".

3.2 Von Neumannalgebren, elementare Eigenschaften

Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Menge von Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann ist die *Kommutante* von $\mathcal{M}$ durch

$$\mathcal{M}' := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid [A, B] = 0 \ \forall B \in \mathcal{M}\} \tag{3.2}$$

definiert (siehe (2.20)). $\mathcal{M}'$ ist offenbar eine Banachalgebra und wenn $\mathcal{M}$ selbstadjungiert ist, sogar eine C*-Algebra. Doppeltes Anwenden der Kommutante liefert offenbar $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$ und dreifaches $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$. Wir definieren nun:

3.2.1. Definition. *Eine* von Neumannalgebra *auf dem Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *ist eine *-Unteralgebra* $\mathcal{M}$ *von* $\mathcal{H}$ *für die* $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ *gilt. Das* Zentrum *einer von Neumannalgebra ist durch* $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ *gegeben. Eine von Neumannalgebra mit* $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}\mathbb{1}$ *heißt* Faktor.

Eine von Neumannalgebra enthält zahlreiche Projektionsoperatoren. Um dies zu sehen, betrachten wir einen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{M}$. Wenn A mit einen Operator B kommutiert, dann kommutiert B auch mit allen Spektralprojektionen von A. Also sind alle diese Projektoren Elemente von $\mathcal{M}$. Jeder selbstadjungierte Operator kann in der Normtopologie durch eine Linearkombination von Spektralprojektoren approximiert werden und jedes Element einer C*-Algebra ist die Linearkombination zweier selbstadjungierter Operatoren. Daher bilden die Projektoren eine totale Teilmenge von $\mathcal{M}$.

3.2.2. Beispiel. *Die C*-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine von Neumannalgebra und sogar ein Faktor. Die Algebra $\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ der kompakten Operatoren (siehe Bsp. 2.1.9) ist keine von Neumannalgebra, da $\mathcal{LC}(\mathcal{H})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist.*

Wir kommen nun zum „Bikommutantentheorem“ von Neumanns, welches die wichtigste Aussage über von Neumannalgebren darstellt. Zuvor noch eine technische Definition:

3.2.3. Definition. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, dann ist*

$$[\mathcal{M}\mathcal{K}] := \overline{\mathrm{span}\{A\psi \,|\, A \in \mathcal{M},\ \psi \in \mathcal{K}\}}^{\|\cdot\|}. \tag{3.3}$$

$\mathcal{M}$ *heißt* nicht degeneriert*, wenn* $[\mathcal{M}\mathcal{H}] = \mathcal{H}$ *ist.*

3.2.4. Satz. *Sei $\mathcal{M}$ eine nicht degenerierte *-Algebra beschränkter Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$\mathcal{M}$ ist eine von Neumannalgebra, also $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.*
2. *$\mathcal{M}$ ist schwach abgeschlossen.*
3. *$\mathcal{M}$ ist stark abgeschlossen.*
4. *$\mathcal{M}$ ist σ-schwach abgeschlossen.*
5. *$\mathcal{M}$ ist σ-stark abgeschlossen.*
6. *$\mathcal{M}$ ist stark* abgeschlossen.*
7. *$\mathcal{M}$ ist σ-stark* abgeschlossen.*

Beweis: [BR79, Thm. 2.4.11] □

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz ist die folgende Dichtheitsaussage:

3.2.5. Korollar. *Sei $\mathcal{M}$ eine nicht degenerierte *-Algebra beschränkter Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann ist $\mathcal{M}$ dicht in $\mathcal{M}''$ bezüglich der schwachen, σ-schwachen, starken und σ-starken Topologie und bzgl. der stark* und der σ-stark* Topologie.*

3.3 Normale Zustände und das Prädual

Eine weitere Möglichkeit von Neumannalgebren zu charakterisieren bietet die Tatsache, daß jede von Neumannalgebra der Dualraum eines Banachraumes ist.

3.3.1. Definition. *Das* Prädual *einer von Neumannalgebra $\mathcal{M}$ ist der Raum aller σ-schwach stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{M}$ und wird mit $\mathcal{M}_*$ bezeichnet.*

3.3.2. Satz. *Das Prädual $\mathcal{M}_*$ der von Neumannalgebra $\mathcal{M}$ ist ein Banachraum in der Norm von $\mathcal{M}^*$ und $\mathcal{M}$ ist das Dual von $\mathcal{M}_*$ bzgl. der Dualität $\mathcal{M}\times\mathcal{M}_* \ni (A,\omega) \mapsto \omega(A)$.*

Beweis: [BR79, Prop. 2.4.18]. □

3.3.3. Beispiel. *Das Prädual $\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$ der von Neumannalgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist isomorph zum Raum $\mathcal{T}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{B}(H) \,|\, \operatorname{tr}\rho < \infty\}$ der Spurklasseoperatoren auf $\mathcal{H}$ zusammen mit der Spurnorm $\|\rho\|_1 = \operatorname{tr}|\rho|$. Der Isomorphismus ist gegeben durch $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \ni \rho \mapsto \omega_A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*$ mit $\omega_\rho(A) = \operatorname{tr}(\rho A)$.*

Nun wollen wir die Zustände untersuchen, die im Prädual einer von Neumannalgebra liegen. Wir definieren:

3.3.4. Definition. *Ein Zustand ω auf der von Neumannalgebra heißt* normal*, wenn er σ-schwach stetig ist.*

3.3.5. Bemerkung. *Im allgemeinen definiert man normale Zustände durch die Bedingung daß $\omega(\sup_i A_i) = \sup_i \omega(A_i)$ für alle aufsteigenden Netze $(A_i)_{i\in I}$ ist. Die zuvor angegebene Definition ist jedoch äquivalent und vermeidet den Begriff des Netzes.*

3.3.6. Satz. *Ein Zustand ω auf der von Neumannalgebra $\mathcal{M}$ ist genau dann normnal, wenn ein Dichteoperator ρ, das heißt $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ mit $\rho \geq 0$ und $\operatorname{tr}\rho = 1$ existiert, so daß $\omega(A) = \operatorname{tr}(\rho A)$ ist.*

Beweis: [BR79, Thm. 2.4.21]. □

Eng verknüpft mit normalen Zuständen ist der Begriff der „Quasiäquivalenz von Darstellungen“ der wie folgt definiert ist:

3.3.7. Definition. *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra*

1. *und π eine Darstellung, dann heißt ein Zustand ω π-normal wenn ein normaler Zustand ρ auf $\pi(A)''$ mit $\omega(A) = \rho(\pi(A))$ existiert.*
2. *Zwei Darstellungen π_1, π_2 von $\mathcal{A}$ heißen* quasiäquivalent *$\pi_1 \approx \pi_2$ wenn alle π_1-normalen Zustände auch π_2-normal sind.*

Betrachten wir einen Zustand ω und seine GNS-Darstellung $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, dann ist ω offenbar π_ω-normal. Betrachten wir zwei Zustände ω_1, ω_2, können wir definieren: ω_1 und ω_2 sind quasiäquivalent $\omega_1 \approx \omega_2$ wenn ihre GNS-Darstellungen quasiäquivalent sind. Mit anderen Worten zwei Zustände sind genau dann quasiäquivalent, wenn sie in derselben Darstellung als Dichteoperatoren darstellbar sind.

Der nächste Satz zeigt unter anderem wie Quasiäquivalenz mit Unitäräquivalenz zusammenhängt.

3.3.8. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $(\mathcal{H}_1, \pi_1)$, $(\mathcal{H}_2, \pi_2)$ nicht degenerierte Darstellungen von $\mathcal{A}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *π_1 und π_2 sind quasiäquivalent.*
2. *Es existiert ein *-Isomorphismus $\alpha : \pi_1(\mathcal{A})'' \to \pi_2(\mathcal{A})''$, so daß $\alpha(\pi_1(A)) = \pi_2(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.*
3. *Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so daß $\bigoplus_{k=1}^{n} \pi_1$ unitäräquivalent zu $\bigoplus_{k=1}^{n} \pi_2$ ist.*

Beweis: [BR79, Thm. 2.4.26] $\square$

Kapitel 4

Die CCR-Algebra

Wir wollen in diesem Kapitel eine bestimmte Klasse von Algebren betrachten, die besonders geeignet ist Vielteichensysteme mit Bosestatistik zu beschreiben.

Um unsere Vorgehensweise zu motivieren, betrachten wir zunächst die Quantisierung eines einfachen Hamiltonschen Systems. Sei daher $V = \mathbb{R}^{2n}$ der Phasenraum, auf dem die *symplektische Form* $V \times V \ni (q_1, p_1; q_2, p_2) \mapsto \sigma(q_1, p_1; q_2, p_2) := \langle q_1, p_2 \rangle - \langle q_1, p_1 \rangle$ gegeben ist. Die Dynamik sei durch eine quadratische, positive Hamiltonfunktion $V \ni (q, p) \mapsto h(f, g) := \sum_{i_1}^{n} \frac{1}{2m_i}(p^i)^2 + \frac{m_i \omega_i^2}{2}(q^i)^2$ gegeben. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich also als Integralkurven des Hamiltonschen Vektorfeldes $X_h : V \to V$, welches durch $dh = \sigma(X_h, \cdot\,)$ definiert ist. Für zwei beliebige Funktionen f, g ist durch die Hamiltonschen Vektorfelder X_f, X_h auch die Poissonklammer $\{f, h\} := \sigma(X_f, X_h)$ definiert. Die Koordinatenfunktionen $V \ni (q, p) \mapsto q^k$ und $V \ni (q, p) \mapsto p_l$, welche wir mit ihren Funktionswerten q_k, p_l identifizieren wollen erfüllen nun die wohlbekannten *kanonischen Poissonrelationen*

$$\{q^k, p^l\} = \delta_{k,l}, \quad \{q^k, q^l\} = \{p^k, p^l\} = 0. \tag{4.1}$$

Die „kanonische Quantisierung" dieses Systems basiert nun auf dem Wunsch einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine lineare Abbildung $f \mapsto A_f$ zu finden, so daß Phasenraumfunktionen f auf Operatoren A_f in $\mathcal{H}$ so abbildet werden, daß $A_{\{f,g\}} = i[A_f, A_g]$ gilt. Dieser Wunsch allerdings läßt sich nicht erfüllen [Got80]. Eine schwächere Forderung, die mehr Aussicht auf Erfolg hat, ist die Suche nach einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, einem dichten Teilraum $D \subset \mathcal{H}$ und $2n$ Operatoren Q^k, P^l die auf D wesentlich selbstadjungiert sind, D invariant lassen und die *kanonischen Vertauschungsrelationen*

$$[Q^k, P^l]\psi = i\delta_{kl}\psi, \quad [Q^k, Q^l]\psi = [P^k, P^l]\psi = 0 \tag{4.2}$$

erfüllen. *Formal* sind diese Vertauschungsrelationen äquivalent zu den *Weylrelationen*

$$V(s)U(t) = U(t)V(s)e^{-i\langle s,t \rangle}, \quad V(s+t) = V(s)V(t), \quad U(s+t) = U(s)U(t) \tag{4.3}$$

wobei für $s, t \in \mathbb{R}^n$

$$V(s) := e^{i(\sum_{k=1}^{n} s^k Q^k)}, \quad U(t) := e^{(i \sum_{l=1}^{n} t^l P^l)} \tag{4.4}$$

ist. Diese Relationen folgen jedoch im strengen mathematische Sinne *nicht* aus den kanonischen Vertauschungsrelationen (siehe hierzu [RS80, VIII.5]). Umgekehrt jedoch ist (4.2) eine Konsequenz von (4.4).

Mit den Operatoren Q^k, P^l können wir nun Polynome $f : V \to \mathbb{R}$

$$(q,p) \mapsto f(q,p) = a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots\beta_n}(q^1)^{\alpha_1}\dots(q^n)^{\alpha_n}(p^1)^{\beta_1}\dots(p^n)^{\beta_n} + \dots + a_0 \quad (4.5)$$

auf Operatoren

$$A_f = a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots\beta_n}(Q^1)^{\alpha_1}\dots(Q^n)^{\alpha_n}(P^1)^{\beta_1}\dots(P^n)^{\beta_n} + \dots + a_0 \quad (4.6)$$

abbilden. Insbesondere erhalten wir den Hamiltonoperator $H := A_h$ des Systems. H ist auf D symmetrisch und positiv und besitzt daher eine selbstadjungierte Fortsetzung $\bar{H}$, so daß wir die Dynamik des quantisierten Systems durch die einparametrige unitäre Gruppe $\exp(tH)$ beschreiben können.

Die soeben konstruierte Abbildung $f \mapsto A_f$ erfüllt jedoch im allgemeinen nicht die oben gestellte Forderung $A_{\{f,g\}} = i[A_f, A_g]$. Eine Beschäftigung mit dieser Problematik hat in den 70' und 80' Jahren unter dem Titel „geometrische Quantisierung“ intensiv stattgefunden, leider ohne wirklich durchschlagenden Erfolg. Näheres zu diesem Thema kann dem Buch von Woodhouse [Woo80] entnommen werden.

Wir wollen nun die Weylrelationen etwas umschreiben um eine Form zu erhalten die sich für eine Verallgemeinerung eignet. Wir führen zu diesem Zweck die *Weyloperatoren* $W(s,t) = \exp(i/2\langle s,t\rangle)V(s)U(t)$ ein und erhalten die folgende äquivalente Form der Weylrelationen:

$$W(s,t)W(s',t') = e^{-\frac{i}{2}\sigma(s,t;s',t')}W(s+s',t+t'). \quad (4.7)$$

Sie hat den Vorteil, daß sie auf beliebige reelle symplektische Vektorräume verallgemeinert werden kann. Dies motiviert die Definition der CCR-Algebren, die wir im nächsten Abschnitt vornehmen wollen.

4.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Wir wollen nun jedem reellen symplektischen Vektorraum eine (bis auf Isomorphie eindeutige) C*-Algebra zuordnen. Dafür erinnern wir zunächst an die Definition eines reellen symplektischen Raumes.

4.1.1. Definition. *Ein Paar* (V,σ) *bestehend aus einem reellen Vektorraum und einer reellwertigen, antisymmetrischen und (schwach) nicht degenerierten*[1] *Bilinearform auf* V *(der* symplektischen Form *heißt* (reeller) symplektischer *Vektorraum.*

Unserer einführenden Argumentation folgend suchen wir nun nach einer C*-Algebra, die von unitären Elementen $W(x)$, $x \in V$ erzeugt wird, die die Weylrelationen (4.7) erfüllen. Hierfür betrachten wir einen unendlichdimensionalen Hilbertraum

[1] D.h. $\sigma(x,y) = 0 \ \forall y = 0 \iff x = 0$.

$\mathcal{L}$ und die direkte Summe $\mathcal{H} := \bigoplus_{x\in V} \mathcal{L}_x$, $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}, \forall x \in V$ (siehe Bemerkung 2.4.14). Auf $\mathcal{H}$ sind nun durch $(F \in \mathcal{H})$

$$(W(f)F)(x) := e^{\frac{i}{2}\sigma(x,f)}F(x+f) \tag{4.8}$$

unitäre Operatoren definiert die, wie sich leicht nachprüfen läßt, die Weylrelationen erfüllen. Die *-Unteralgebra $\mathcal{A}_0$ die von den so definierten $W(f)$ algebraisch erzeugt wird kann nun in der Operatornorm abgeschlossen werden und wir erhalten eine C*-Algebra mit den gewünschten Eigenschaften. Wir haben daher den folgenden Satz bewiesen:

4.1.2. Satz. *Zu jedem reellen, symplektischen Vektorraum* (V,σ) *existiert eine C*-Algebra* $\mathcal{A}$ *die von Elementen* $W(f)$, $f \in V$ *erzeugt wird (sogn.* Weylelementen*) für die gilt:*

1. $W(f)^* = W(-f)$ *für alle* $f \in V$ *und*

2. $W(f)W(g) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}W(f+g)$ *für alle* $f, g \in V$.

Sei nun (V,σ) der Phasenraum eines klassischen Hamiltonschen Systems. Die Idee ist, die selbstadjungierten Elemente von $\mathcal{A}$ als Observablen des quantisierten Systems aufzufassen. Hierfür ist es jedoch wesentlich zu wissen, ob die von den $W(f)$ erzeugte Algebra bis auf Isomorphie eindeutig ist, da sonst die Physik von der richtigen Wahl der Algebra $\mathcal{A}$ abhängig ist.

4.1.3. Satz. *Seien* $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ *C*-Algebren die von Elementen* $W_1(f)$ *bzw.* $W_2(f)$ *erzeugt werden, die die Bedingungen aus Satz 4.1.2 erfüllen, dann gibt es einen eindeutigen *-Isomorphismus* $\alpha : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *mit der Eigenschaft* $\alpha(W_1(f)) = W_2(f)$. *Es gibt daher zu jedem reellen symplektischen Vektorraum* (V,σ) *eine algebraisch eindeutige C*-Algebra die von den Weylelementen* $W(f)$ *erzeugt wird. Wir werden sie die* CCR-Algebra $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *von* (V,σ) *nennen.*

Beweis: [BR81, Seite 20]. □

Die folgende Behauptung fäßt ein paar simple Eigenschaften der CCR-Algebren zusammen.

4.1.4. Behauptung. *Sei* (V,σ) *ein reeller, symplektischer Vektorraum und* $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *die dazugehörige CCR-Algebra, dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. $W(0) = \mathbb{1}$

2. $W(f)$ *ist unitär für alle* $f \in V$.

3. $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *ist nicht separabel für* $\dim V \neq 0$.

4. $\|W(f) - \mathbb{1}\| = 2$ *für* $f \neq 0$.

5. *Sei* $F \subset V$ *ein linearer Teilraum und* $\mathcal{A}(F) \subset \mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *die C*-Teilalgebra die von den Weylelementen* $W(f)$ *mit* $f \in F$ *erzeugt wird, dann folgt aus* $\mathcal{A}(F) = \mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *daß auch* $F = V$ *ist.*

6. $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *hat keine nichttrivialen,* $\|\cdot\|$*-abgeschlossenen *-Ideale (d.h.* $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *ist* einfach.

Beweis: Die Aussagen sind zum Teil trivial. Für den Rest sei wieder auf [BR81, Seite 20] verwiesen. □

Betrachten wir nun einen symplektischen Isomorphismus $T: V \to V$, das heißt $\sigma(Tf, Tg) = \sigma(f,g)$ für alle $f, g \in V$. Dann hat die Familie $(W_T(f))_{f\in V}$ mit $W_T(f) = W(T(f))$ offenbar die gleichen Eigenschaften wie die originale $(W(f))_{f\in V}$. Satz 4.1.3 impliziert daher die Existenz genau eines *-Automorphismus α_t von $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ mit $\alpha(W(f)) = W(T(f))$. Das heißt es gilt die folgenden Behauptung:

4.1.5. Behauptung. *Zu jedem symplektischen Isomorphismus* T *des symplektischen Vektorraumes* (V,σ) *existiert genau ein Automorphismus* α_T *der CCR-Algebra* $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *der der Gleichung*

$$\alpha_t(W(f)) = W(Tf), \quad \forall f \in V \tag{4.9}$$

genügt. Automorphismen dieser Form heißen Bogolubovtransformationen.

4.2 Reguläre und quasifreie Zustände

Wir wollen nun einen Zustand ω auf einer CCR-Algebren $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ betrachten. Er ist offenbar durch seine Werte auf den Weylelementen eindeutig festgelegt. Es ist daher nützlich sein *erzeugendes Funktional*

$$V \ni f \mapsto \phi_\omega(f) := \omega(W(f)) \in \mathbb{C} \tag{4.10}$$

zu betrachten. Mit seiner Hilfe können wir eine ausgezeichnete Klasse von Zuständen definieren.

4.2.1. Definition. *Ein Zustand* ω *auf der CCR-Algebra* $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *heißt* regulär *wenn für jedes* $f \in V$ *die Funktion* $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi_\omega(tf) \in \mathbb{C}$ *stetig ist.*

Reguläre Zustände sind deshalb besonders interessant, weil ihnen Quantenfelder zugeordnet werden können. Um dies zu sehen, betrachten wir einen regulären Zustand ω und seine GNS-Darstellung $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$. Regularität impliziert nun daß $t \mapsto \langle \Omega_\omega, W(tf)\Omega_\omega\rangle$ für alle $f \in V$ stetig ist. Da Ω_ω zyklisch ist und da die Weyloperatoren die CCR-Algebra erzeugen, folgt daraus, daß die einparametrige Gruppe $t \mapsto W(tf)$ schwach stetig ist. Es existiert daher ein selbstadjungierter Erzeuger $\Phi_\omega(f)$ mit

$$W(f) = \exp(i\Phi_\omega(f)). \tag{4.11}$$

Mit anderen Worten die GNS-Darstellung eines regulären Zustandes ist *regulär*, wenn wir reguläre Darstellungen wie folgt definieren:

4.2.2. Definition. *Eine Darstellung* $(\mathcal{H},\pi)$ *einer CCR-Algebra* $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *heißt* regulär*, wenn für alle* $f \in V$ *die einparametrige, unitäre Gruppe* $t \mapsto \pi(W(tf))$ *stark stetig ist.*

Es ist möglich an komplexwertige Funktionen auf V Bedingungen zu stellen, so daß sie erzeugende Funktionale von Zuständen ergeben:

4.2.3. Behauptung. *Das komplexwertige Funktional ϕ auf V ist das erzeugende Funktional eines regulären Zustandes ω, wenn es die folgeden Bedingungen erfüllt:*

1. $\phi(0) = 1$

2. $\lambda \mapsto \phi(\lambda f)$ *ist für alle* $f \in V$ *stetig.*

3. *Für alle Folgen* $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $f_j \in V$, $j = 1, \dots n$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_l \lambda_j e^{-\frac{i}{2}\sigma(f_j, f_l)} \phi(f_j - f_l) \geq 0. \tag{4.12}$$

Beweis: [Emc72, Seite 307]. Die Idee hinter dieser Aussage beruht auf der Tatsache, daß die Weylelemente $W(f)$ in $\mathrm{CCR}(V, \sigma)$ linear unabhängig sind. (Das ist leicht zu sehen; Übungsaufgabe!) Daher kann für alle diese Linearkombinationen das lineare Funktional $\omega(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j W(f_j)) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi(f_j)$ definiert werden. Die erste Bedingung bedeutet also $\omega(\mathbb{1}) = 1$, die dritte $\omega(A^*A) \geq 0$, also die Positivität und die zweite die Regularität von ω. Es ist also nur noch zu zeigen, daß ω stetig in der Normtopologie ist, denn dann kann ω auf ganz $\mathrm{CCR}(V, \sigma)$ als regulärer Zustand fortgesetzt werden. Hiefür ist Satz 2.5.1 nützlich. □

Die in (4.11) eingeführten Felder haben jedoch nicht die Struktur der Quantenfelder aus Kapitel 1. Für diesen Zweck ist eine weitergehende Einschränkung erforderlich.

4.2.4. Behauptung. *Sei* $s(\cdot, , \mathrm{cdot})$ *ein reelles Skalarprodukt auf* V. *Dann ist*

$$V \ni f \mapsto \phi_\omega(f) = e^{-\frac{1}{4}s(f,f)} \in \mathbb{C} \tag{4.13}$$

genau dann das erzeugende Funktional eines regulären Zustandes ω *wenn*

$$|\sigma(f, g)| \leq \sqrt{s(f, f)}\sqrt{(s(g, g)} \tag{4.14}$$

für alle $f, g \in V$ *erfüllt ist. Der Zustand* ω *heißt dann* quasifrei.

Beweis: [BW92, Lemma 8.2.8]. □

Das besondere an quasifreien Zuständen ist ihre enge Verknüpfung zu Fockraumdarstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen. Der Schlüssel hierfür ist die folgende Aussage:

4.2.5. Behauptung. *Sei* (V, σ) *ein symplektischer Vektorraum und* s *ein reelles Skalarprodukt, so daß (4.14) gilt, dann gibt es einen komplexen Hilbertraum* $\mathcal{H}$, *und eine Abbildung* $K : V \to \mathcal{H}$, *so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. K *ist* $\mathbb{R}$*-linear.*

2. $K(V) + iK(V) \subset \mathcal{H}$ *ist dicht.*

3. K *ist symplektisch* $\sigma(\mathsf{Kf}, \mathsf{Kg}) = \mathrm{Im}\langle \mathsf{f}, \mathsf{g}\rangle$.

4. $\|\mathsf{K}(\mathsf{f})\|^2 = \mathsf{s}(\mathsf{f}, \mathsf{f})$.

Beweis: Offenbar ist (V, s) ein reeller Prähilbertraum und kann somit vervollständigt werden. $(\bar{V}, \bar{s})$ bezeichne diese Vervollständigung. Wegen (4.14) ist σ nun eine stetige Bilinearform auf (V, s) und kann stetig auf $(\bar{V}, \bar{s})$ fortgesetzt werden. Wir bezeichnen diese Fortsetzung mit $\bar{\sigma}$. Nun betrachten wir den komplexen Vektorraum $\mathcal{H} = \bar{V} \oplus i\bar{V}$ und das komplexe Skalarprodukt, welches man durch komplex lineares/antilineares Fortsetzen von $\langle f + i0, g + i0\rangle := \bar{s}(f, g) + i\bar{\sigma}(f, g)$ erhält. Die Abbildung $V \ni f \mapsto K(f) := f + i0 \in \mathcal{H}$ erfüllt offenbar alle erwünschten Bedingungen. □

Unmittelbare Folgerung dieser Aussage ist nun der folgende Satz:

4.2.6. Satz. *Sei* ω *quasifreier Zustand auf* $\mathrm{CCR}(V, \sigma)$ *mit erzeugendem Funktional* $\phi_\omega(f) = \exp(-\frac{1}{4}s(f, f))$. *Zusätzlich sei* $\mathcal{H}$ *ein komplexer Hilbertraum und* $K : V \to \mathcal{H}$ *die Abbildung aus Beh. 4.2.5, dann ist auf dem symmetrischen Fockraum* $\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ *(siehe Def. 1.2.5) durch (*$\Phi_S(K(f)$ *bezeichnet den Segaloperator von* $K(f)$*; siehe Gl. 1.54))*

$$\pi(W(f)) = W_\omega(f) := e^{i\Phi_s(K(f))}, \quad \forall f \in V \tag{4.15}$$

eine zyklische Darstellung definiert (mit dem Fockraumvakuum $\Omega_0 \in \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ *(siehe Def. 1.2.5) als zyklischem Vektor), die unitär äquivalent zur GNS-Darstellung von* ω *ist.*

Beweis: Die unitären Operatoren $\exp(i\Phi_S(\phi)) \in \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ erfüllen die Relation

$$e^{i\Phi_S(\phi+\psi)} = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle\phi,\psi\rangle} e^{i\Phi_S(\phi)} e^{i\Phi_S(\psi)}. \tag{4.16}$$

Das folgt *formal* aus den Kommutatorrelationen in Satz 1.2.14(2). Ein exakter Beweis findet sich in [RS75, Thm X.41]. Setzen wir nun $K(f)$ und $K(g)$ ein, dann folgt mit Beh. 4.2.5 daß die Operatoren $W_\omega(f)$, $W_\omega(g)$ die selben Weylrelationen erfüllen wie die Weylelemente $W(f)$ und $W(g)$. Damit definiert (4.15) offenbar eine Darstellung von $\mathrm{CCR}(V, \sigma)$.

Für die Zyklizität von Ω_0 ist zu zeigen, daß die Menge $\{W_\omega(f)\Omega_0 \,|\, f \in V\}$ total in $\mathcal{H}$ ist (d.h. der Abschluß der linearen Hülle ist ganz $\mathcal{H}$). Hierfür benutzen wir die Tatsache, daß

$$e^{i\Phi_s(\psi)}\Omega_0 = e^{-\frac{1}{4}\|\psi\|^2} e\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\psi\right) \tag{4.17}$$

ist, wobei $e(\psi)$ den Exponentialvektor von ψ bezeichnet,

$$e(\psi) := \sum_{n=0}^{\infty} \psi^{\otimes^n} \text{ mit } \psi^{\otimes^n} := \begin{cases} \bigotimes_{k=1}^n \psi & \text{für } n > 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

dem wir bereits im Beweis von Satz 1.4.2 begegnet sind. (Ein Beweis für Gleichung (4.17) findet sich in [Par92, Kapitel 20]; dabei ist zu beachten, daß die dortige Definition des Segaloperators sich von der unsrigen um ein Faktor $\sqrt{2}$ unterscheidet).

Da $K(V) + iK(V)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt aus [Par92, Kor. 19.5] daß $\{e(K(f)) \,|\, f \in V\}$ total in $\mathcal{H}$ ist, was zu beweisen war (die Tatsache, daß $K(V) + iK(V)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist und nicht $K(V)$ ist hier unerheblich, da der Beweis von Korollar 19.5 in [Par92] sehr leicht auf unsere Situation übertragen werden kann).

Damit bleibt zu zeigen, daß die somit konstruierte zyklische Darstellung von $\mathrm{CCR}(V, \sigma)$ unitär äquivalent zur GNS-Darstellung von ω ist. Das heißt es ist zu zeigen, daß

$$\langle \Omega, \pi(W(f))\Omega\rangle = \langle \Omega, e^{i\Phi_S(K(f))}\Omega\rangle = \omega(W(f)) = \phi_\omega(f) = e^{-\frac{1}{4}s(f,f)} \tag{4.19}$$

ist. Hierfür benutzen wir erneut (4.17) und die Gleichung

$$\langle \Omega, W_\omega(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f)\Omega\rangle = \langle W_\omega(-\frac{1}{2}f)\Omega, W_\omega(\frac{1}{2}f)\Omega\rangle = \\ e^{-\frac{1}{8}\|K(f)\|^2}\langle e(-\frac{i}{2\sqrt{2}}K(f)), \frac{i}{2\sqrt{2}}e(K(f))\rangle \tag{4.20}$$

mit $\langle e(\psi), e(\phi)\rangle = \exp(\langle \psi, \phi\rangle)$ [Par92, Gl 19.2] und Beh. 4.2.5 folgt daher

$$\langle \Omega, \pi(W(f))\Omega\rangle = e^{-\frac{1}{4}\|K(f)\|^2} = e^{-\frac{1}{4}s(f,f)}, \tag{4.21}$$

was zu beweisen war. □

Eine besondere Rolle spielen nun diejenigen quasifreien Zustände, die zugleich reine Zustände sind. Es handelt sich dabei gerade um die sogn. *Fockzustände*:

4.2.7. Definition. *Ein quasifreier Zustand ω auf der CCR-Algebra* $\mathrm{CCR}(V, \sigma)$ *mit erzeugendem Funktional* $\exp(-\frac{1}{4}s(\cdot\,,\cdot))$ *heißt* Fockzustand *wenn eine lineare Abbildung $J : V \to V$ existiert, so daß*

1. $J^2 = -\mathbb{1}$,
2. $\sigma(f, Jg) = -\sigma(Jf, g)$ *für alle* $f, g \in V$ *und*
3. $\sigma(f, Jf) = s(f, f)$ *für alle* $f \in V$

gilt. J *heißt* Komplexifizierung *von* V.

Für Fockzustände läßt sich die Abbildung $K : V \to \mathcal{H}$ aus Beh. 4.2.5 etwas modifizieren. Wir können nämlich aus V durch $(a + ib)f := af + bJf$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ einen komplexen Vektorraum machen. Mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := s(f, g) + i\sigma(f, g)$ ist V dann ein komplexer Prähilbertraum. Das heißt für Fockzustände existiert eine Abbildung $K : V \to \mathcal{H}$ wie in Beh. 4.2.5 für die sogar $K(V)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist (und nicht nur $K(V) + iK(V)$). Insbesondere heißt dies wir können für Fockzustände ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß ein komplexer Prähilbertraum $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ gegeben ist. so daß der symplektische Raum durch $(V, \mathrm{Im}\langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ und das erzeugende Funktional durch $\exp(-\frac{1}{4}\|\cdot\|^2)$ gegeben ist. Wir nennen den zugehörigen Fockzustand ω_0 den *ausgezeichneten Fockzustand* und seine GNS-Darstellung die *ausgezeichnete Fockdarstellung*.

Wir kommen nun zu zwei wichtigen Eigenschaften von Fockzuständen. Die erste haben wir bereits angekündigt. Jeder Fockzustand ist ein reiner Zustand.

4.2.8. Satz. *Sei ω quasifreier Zustand auf der CCR-Algebra* $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$. *Dann ist ω genau dann ein Fockzustand wenn seine GNS-Darstellung irreduzibel ist. Daher gilt auch, daß ω genau dann ein reiner Zustand ist wenn er Fockzustand ist (siehe Satz 2.6.5).*

Beweis: [BW92, Lemma 8.2.11]. □

4.2.9. Satz. *Zu zwei beliebigen Fockzuständen ω_1, ω_2 auf der CCR-Algebra* $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *existiert eine Bogolubovtransformation* $\alpha : \mathrm{CCR}(V,\sigma) \to \mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *so daß $\omega_1 = \omega_2 \circ \alpha$ ist. Mit anderen Worten die Gruppe der Bogolubovtransformationen operiert transitiv auf der Menge der Fockzustände.*

Beweis: [BW92, Lemma 8.2.12]. □

4.3 Bogolubovtransformationen

Betrachten wir nun einen komplexen Prähilbertraum $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$, die zugehörige CCR-Algebra $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ (mit $\sigma = \mathrm{Im}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$) und den ausgezeichneten Fockzustand ω_0 (mit erzeugendem Funktional $\exp(-\frac{1}{4}\|\,\cdot\,\|^2)$). Dann existiert, wie soeben bemerkt, zu jedem weiteren Fockzustand ω eine Bogolubovtransformation $\alpha : \mathrm{CCR}(V,\sigma) \to \mathrm{CCR}(V,\sigma)$ mit $\omega = \omega_0 \circ \alpha$. Für die GNS-Darstellungen bedeutet dies, daß $\langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle = \langle \Omega_{\omega_0}, \pi_{\omega_0}(\alpha(A))\Omega_{\omega_0}\rangle$ ist. Die Eindeutigkeit der GNS-Darstellung impliziert daher die Existenz eines unitären Operators $U_1 : \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}_{\omega_0}$ mit $U_1 \pi_\omega(A) U_1^* = \pi_{\omega_0}(\alpha(A))$ Dies bedeutet jedoch nicht, daß π_ω und π_{ω_0} unitär äquivalent sind, denn dafür müßte zusätzlich ein unitärer Operator $U_2 : \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}_{\omega_0}$ mit $U_2 \pi_\omega(A) U_2^* = \pi_{\omega_0}(A)$ existieren. Mit anderen Worten der unitäre Operator $U_1 U_2^* =: U : \mathcal{H}_{\omega_0} \to \mathcal{H}_{\omega_0}$ implementiert α in der GNS-Darstellung von ω_0, das heißt es gilt $U\pi_{\omega_0}(A)U^* = \pi_{\omega_0}(\alpha(A))$. Um also zu entscheiden, ob der Fockzustand (bzw. seine GNS-Darstellung) unitär äquivalent zur ausgezeichneten Fockdarstellung ist, müssen wir untersuchen, ob die zugehörige Bogolubovtransformation unitär implementierbar ist.

Um diese Frage zu beantworten folgen wir der Darstellung in [Par92, Kap. 22]. Eine allgemeinere Aussage, die dafür technisch aufwendiger ist, findet sich in [Ara71] (siehe auch [BW92, 8.2.6]). Wir nehmen hierfür an, daß V sogar ein komplexer (separabler) Hilbertraum ist und betrachten einen $\mathbb{R}$-linearen Teilraum $V_0 \subset V$ für den $V_0 + iV_0 = V$ gilt. Ein reell linearer Operator $T : V \to V$, kann dann mit $f \in V_0$ in $Tf = T_{11}f + iT_{21}f$ bzw. $T(if) = T_{12}f + iT_{22}f$ zerlegt werden. Dies definiert vier $\mathbb{R}$-lineare Operatoren T_{ij}, $i,j = 1,2$. Diese wiederum definieren einen $\mathbb{R}$-linearen Operator T_0 durch

$$V_0 \oplus V_0 \ni (f,g) \mapsto T_0(f,g) = (T_{11}f + T_{12}g, T_{21}f + T_{22}g) \in V_0 \oplus V_0. \tag{4.22}$$

Mit diesen Begriffen können wie nun das angekündigte Theorem formulieren:

4.3.1. Satz. *Sei V ein komplexer, separabler Hilbertraum* $\mathrm{CCR}(V,\sigma)$ *mit* $\sigma = \mathrm{Im}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *die dazugehörige CCR-Algebra, ω_0 der ausgezeichnete Fockzustand, $V_0 \subset V$ ein $\mathbb{R}$-linearer Teilraum mit $V_0 + iV_0 = V$ und $T : V \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare, bijektive Abbildung mit den folgenden Eigenschaften*

1. *T und T^{-1} sind stetig.*

2. *T ist symplektisch:* $\mathrm{Im}\langle Tf, Tg\rangle = \mathrm{Im}\langle f, g\rangle$ *für alle* $f, g \in V$.

Die durch $\alpha_T(W(f)) = W(Tf)$ gegebenen Bogolubovtransformation ist dann und nur dann in der GNS-Darstellung π_{ω_0} unitär implementierbar wenn $S_0^*S_0 - \mathbb{1}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator[2] *in $V_0 \oplus V_0$ ist.*

Beweis: [Par92, Thm. 22.11]. $\square$

4.3.2. Beispiel. *Sei zum Beispiel $V = L^2(\mathbb{R}, dx)$, $V_0 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dx)$ und $T(f + ig) := \rho^{-1}f + i\rho g$ mit $\rho \in \mathbb{R}^+$. Der Operator T ist offenbar symplektisch, stetig, invertierbar und T^{-1} ist ebenfalls stetig. Er erfüllt also die Voraussetzungen des Satzes. Der Operator $T_0 : V_0 \oplus V_0 \to V_0 \oplus V_0$ hat die Form $T_0(f, g) = (\rho^{-1}f, \rho g)$ und ist daher selbstadjungiert. Also ist $(T_0^*T_0 - \mathbb{1})(f, g) = (\rho^{-2} - 1)f, (\rho^2 - 1)g)$. Für $\rho^2 \neq 1$ ist dies jedoch nie Hilbert-Schmidt, so daß die durch $\alpha(W(f)) = \alpha(W(Tf))$ gegebene Bogolubovtransformation nicht unitär implementierbar ist.*

Bezeichnet nun ω_0 wieder den ausgezeichneten Fockzustand auf $\mathrm{CCR}(V, \sigma)$ dann ist also $\omega = \omega_0 \circ \alpha$ ein weiterer Fockzustand, dessen GNS-Darstellung unitär inäquivalent zur ausgezeichneten Fockdarstellung ist. Dies zeigt, daß es im allgemeinen mehrere unitär inäquivalente, reguläre, irreduzible Darstellungen einer CCR-Algebra gibt. Eine Ausnahme bilden CCR-Algebren die über endlichdiemensionalen symplektischen Räumen konstruiert sind.

Bevor wir hierzu kommen, wollen wir jedoch noch die Quasi(in)äquivalenz der Darstellungen π_ω und π_{ω_0} untersuchen. Angenommen π_ω und π_{ω_0} sind quasiäquivalent, dann existiert ein Dichteoperator λ auf $\mathcal{H}_{\omega_0}$ so daß $\omega(A) = \mathrm{tr}(\pi_{\omega_0}(A)\lambda)$ ist. Da ω aber ein Fockzustand ist, ist ω auch reiner Zustand und kann nicht in eine echte konvexe Linearkombination zerlegt werden. Das heißt ω ist ein Vektorzustand mit anderen Worten es existiert ein Vektor $\tilde{\Omega}_\omega \in \mathcal{H}_{\omega_0}$ so daß $\omega(A) = \langle \tilde{\Omega}_\omega, \pi_{\omega_0}(A)\tilde{\Omega}_\omega\rangle$ gilt. Zugleich ist $\tilde{\Omega}_0$ zyklischer Vektor bezgl. der ausgezeichneten Fockdarstellung, denn diese ist irreduzibel und daher jedes $\psi \in \mathcal{H}_{\omega_0}$ mit $\psi \neq 0$ zyklisch. Dies aber bedeutet, daß $(\mathcal{H}_{\omega_0}, \pi_{\omega_0}, \tilde{\Omega}_\omega)$ unitär äquivalent zur GNS-Darstellung von ω ist, im Widerspruch zur unitären Inäquivalenz der Darstellungen. Also sind ω_0 und ω quasiinäquivalent!

Zum Abschluß diese Abschnittes wollen wir nun noch das bereits ankekündigte Theorem von Stone und von Neumann angeben, welches aussagt, daß die soeben untersuchten „Patologien“ bei Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden nicht auftreten können.

4.3.3. Satz. *Alle irreduziblen, regulären Darstellungen der CCR-Algebra $\mathrm{CCR}(\mathbb{R}^{2n}, \sigma)$ sind unitär äquivalent zur ausgezeichneten Fockdarstellung.*

Beweis: [BW92, 8.2.5] $\square$

[2]Ein Operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ (reell oder komplex) heißt *Hilbert-Schmidt-Operator* wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\phi_n\|^2$ für eine (und damit für alle) Orthonormalbais $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konviergiert.

4.4 Beispiel: Der harmonische Oszillator

Wir wollen nun die bis jetzt bereitgestellten Strukturen auf einige konkrete Beispiele anwenden, zunächst auf den wohlbekannten harmonischen Oszillator. Wir betrachten zu diesem Zwecke den *reellen*, symplektischen Vektorraum (V_1, σ) mit $V_1 = \mathbb{C}$ und $\sigma(z_1, z_2) = \mathrm{Im}(\overline{z_1} z_2)$. Die klassischen Bewegungsgleichungen sind durch die Hamiltonfunktion

$$h : V_1 \ni (q + ip) \mapsto h(q + ip) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \in \mathbb{R} \tag{4.23}$$

bzw. durch die entsprechenden Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}(t) = p(t), \dot{p}(t) = -\omega^2 q(t) \tag{4.24}$$

gegeben. Zu den Anfangsdaten $q(0) + ip(0) = q_0 + ip_0$ gehören die Lösungen

$$q(t) = \mathrm{Re}((q_0 + i\frac{p_0}{\omega})e^{-i\omega t}), \quad p(t) = \mathrm{Im}((\omega q_0 + ip_0)e^{-i\omega t}) \tag{4.25}$$

welche durch

$$V_1 \ni z_0 = (q_0 + ip_0) \mapsto T_t(z_0) = z(t) = q(t) + ip(t) \in V_1 \tag{4.26}$$

eine einparametrige Gruppe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ symplektischer Transformationen definieren.

Betrachten wir nun die CCR-Algebra $\mathrm{CCR}(V_1, \sigma)$. Die T_t definieren auf ihr die Bogolubovtransformationen $\alpha_t(W(z_0)) = W(z(t))$ welche wir als Quantendynamik im Heisenbergbild interpretieren können. Um diese Dynamik nun auf die bekannte Art durch unitäre Operatoren ausdrücken zu können, führen wir die Abbildung

$$V_1 \ni z = q + ip \mapsto K_1(z) := \sqrt{\omega}q + \frac{i}{\sqrt{\omega}}p \in \mathbb{C} \tag{4.27}$$

ein. Sie ist bijektiv, reell-linear und symplektisch (ist also ein Beispiel für die Abbildung aus Behauptung 4.2.5) und sie verknüpft die T_t mit den unitären Transformationen

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto u_t \cdot z := e^{-i\omega t} z \in \mathbb{C}, \tag{4.28}$$

denn es ist

$$T_t(K_1^{-1}(z_0)) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\mathrm{Re}(z_0 e^{-i\omega t}) + i\sqrt{\omega}\,\mathrm{Im}(z_0 e^{-i\omega t}) \tag{4.29}$$

und daher

$$K_1(T_t(K_1^{-1}(z_0))) = u_t \cdot z_0. \tag{4.30}$$

Betrachten wir also auf $\mathrm{CCR}(V_1, \sigma)$ den Fockzustand ω_0 mit erzeugendem Funktional

$$\phi_{\omega_0}(z) = \omega_0(W(z)) = e^{-\frac{1}{4}|K_1(z)|^2}, \tag{4.31}$$

dann ist

$$\omega_0(\alpha_t(W(z))) = \omega_0(W(T_t(z))) = e^{-\frac{1}{4}|K_1(T_t(z))|^2} = e^{-\frac{1}{4}|u_t \cdot K_1(z)|} = \\ e^{-\frac{1}{4}|K_1(z)|^2} = \omega_0(W(z)). \quad (4.32)$$

Mit anderen Worten ω_0 ist unter der Zeitentwicklung α_t invariant und wird daher in der GNS-Darstellung π_{ω_0} von ω_0 unitär implementiert. Das heißt es existiert genau eine einparametrige (stark stetige) unitäre Gruppe U_t auf dem GNS-Hilbertraum $\mathcal{H}_{\omega_0}$, die das GNS-Vakuum invariant läßt ($U_t\Omega_{\omega_0} = \Omega_{\omega_0}$) und für die gilt:

$$\pi_{\omega_0}(\alpha_t(A)) = U_t \pi_{\omega_0}(A) U_t^*. \quad (4.33)$$

Außerdem können wir die selbstadjungierten Operatoren

$$\Psi(z) := \frac{d}{dt}\pi_{\omega_0}(W(tz))|_{t=0} \quad (4.34)$$

definieren, da die GNS-Darstellung π_{ω_0} regulär ist. Mit

$$Q\psi := \Psi(\frac{1}{\omega}) \text{ und } P\psi = \Psi(i\omega)\psi \quad (4.35)$$

erhalten wir daher zwei selbstadjungierte Operatoren, die aufgrund der Weylrelationen die kanonischen Vertauschungsrelationen $[Q, P]\psi = i\psi$ erfüllen. (Q und P besitzen einen gemeinsamen dichten Definitionsbereich $F_0 \subset \mathcal{H}_{\omega_0}$ den sie auf sich abbilden. Das folgt aus der Struktur quasifreier Zustände; siehe Satz 4.2.6).

Wir haben also durch die Konstruktion der CCR-Algebra CCR(V_1, σ) und durch die Wahl des Zustandes ω_0, das zu Beginn dieses Kapitels erwähnte Quantisierungsprogramm durchgeführt. Dabei ist die Wahl des Zustandes nicht entscheidend, denn aufgrund des Eindeutigkeitssatzes von Stone und von Neumann 4.3.3 erfüllt jeder reguläre, reine Zustand genau den selben Zweck. Insbesondere also dürfte sich das soeben konstruierte Modell nicht von dem üblichen harmonischen Oszillator unterscheiden. Um dies zu sehen, verwenden wir die Konstruktion aus Satz 4.2.6. Der GNS-Hilbertraum kann also mit dem symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}_S(\mathbb{C})$ identifiziert werden. Da aber $\mathbb{C} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}$ ist, ist in diesem Falle $\mathcal{F}_S(\mathbb{C}) = l^2(\mathbb{N}_0)$. Das in diesem Hilbertraum kanonisch gegebene Orthonormalsystem bezeichnen wir mit $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (also $\chi_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit der Eins an n-ter Stelle). Die Darsteller der Weyloperatoren sind durch $\pi_{\omega_0}(W(z)) = \exp(i\Phi_S(K(z)))$ gegeben, wobei $\Phi_S(z)$ wieder die Segaloperatoren sind, also $\Phi_S(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A(z) + A(z)^*)$. Erzeugungs und Vernichtungsoperator haben in diesem speziellen Falle die wohlbekannte Form

$$A(z)\chi_n = \bar{z}A\chi_n \text{ mit } A\chi_n = \sqrt{n}\chi_{n-1} \quad (4.36)$$

und

$$A^*(z)\chi_n = zA^*\chi_n \text{ mit } A^*\chi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{n+1} \quad (4.37)$$

und sind natürlich auf dem Teilraum $F_0 := \{(z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0, \dots) \in l^2(\mathbb{N}_0)\}$ definiert (siehe Def. 1.2.5). Die Segaloperatoren hängen offenbar mit den in (4.34) definierten Operatoren $\Psi(z)$ durch $\Psi(z) = \Phi_S(K_1(z))$ zusammen. Aus (4.35) folgt daher für die Operatoren Q, P

$$Q\psi = \Phi_S(\frac{1}{\sqrt{\omega}})\psi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(A\psi + A^*\psi) \tag{4.38}$$

und

$$P\psi := \Phi_S(i\sqrt{\omega}) := -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(A\psi - A^*\psi). \tag{4.39}$$

Dies sind aber die wohlbekannten Operatoren für Ort und Impuls in der „Teilchenzahldarstellung“. Um zur Ortsdarstellung zu gelangen müssen diejenige unitäre Transformation $L : l^2(\mathbb{N}_0) \to L^2(\mathbb{R}, dx)$ benützen, die $\chi_n \in l^2(\mathbb{N}_0)$ auf die normierten Eigenfunktionen $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ des selbstadjungierten Operators $-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\omega^2}{2}x^2$ abbilden, also

$$\psi_n(x) = \tilde{\psi}_n(\sqrt{\omega}x), \text{ mit } \tilde{\psi}_n(\xi) = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\pi}}\frac{1}{2^n n!}(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}. \tag{4.40}$$

Diese Prozedur ist aus der Quantenmechanik wohlbekannt, weshalb wir hier nicht näher darauf eingehen wollen. Es ergeben sich für Q, P die wohlbekannten Ausdrücke

$$(LQL^*\psi)(x) = x\psi(x), \quad LPL^*\psi = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\psi. \tag{4.41}$$

Damit bleibt die Struktur der Dynamik, also der U_t, zu betrachten. Wegen (4.33) ist

$$U_t e^{i\Phi_S(K_1(z))}U^* = e^{i\Phi_S(K_1(T_t z))} = e^{i\Phi_S(u_t K_1(z))}. \tag{4.42}$$

Für das letzte Gleichheitszeichen wurde (4.30) verwendet. Mit Satz 1.2.14(3) folgt daher daß $U_t = \Gamma(u_t)$ ist (siehe Satz 1.2.8). Daher folgt für den Hamiltonoperator $-iH\psi = \frac{d}{dt}U_t\psi|_{t=0}$ wegen Satz 1.2.8 die Gleichung $H\psi = d\Gamma(\omega)\psi$ also $H\chi_n = n\omega\chi_n$ und somit auch $LHL^*\psi_n = n\omega\psi_n$. Nun ist jedoch aus der Quantenmechanik des harmonischen Oszillators wohlbekannt, daß

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\psi_n(x) + \frac{\omega^2}{2}x^2\psi_n(x) = \omega(n + \frac{1}{2})\psi_n(x) \tag{4.43}$$

ist. Daher ergibt sich für H:

$$(LHL^*\psi)(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\psi_n(x) + \frac{\omega^2}{2}x^2\psi_n(x) - \frac{1}{2}\psi_n(x). \tag{4.44}$$

Wir haben also den harmonischen Oszillator *ohne* Nullpunktsenergie quantisiert! Während uns dies hier stört, ist dieser Effekt bei der Quantisierung des Skalarfeldes, die wir im nächsten Abschnitt betrachten wollen.

4.5 Beispiel: Das freie Skalarfeld

Wir kehren nun also in das 1. Kapitel zurück und betrachten erneut das freie Skalarfeld. Aus der Bemerkung 1.1.4 entnehmen wir den symplektischen Vektorraum (V, σ) mit $V_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und

$$\sigma(f_1, p_1; f_2, p_2) := \langle f_1, p_2 \rangle - \langle f_2, p_1 \rangle, \tag{4.45}$$

wobei $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dx)$ bezeichnet. Die Dynamik des Modells hatten wir bereits in 1.1 untersucht. Für die Anfangsdaten $(f, p) \in V$ ergibt sich gemäß (1.15) und (1.16)

$$f_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{a(k)} e^{-i(\langle k,x \rangle - \omega(k)t)} + a(k) e^{i(\langle k,x \rangle - \omega(k)t)} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}} \tag{4.46}$$

und

$$\begin{aligned} p_t(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\overline{a(k)} \omega(k) e^{-i(\langle k,x \rangle - \omega(k)t)} & - \\ - a(k)\omega(k) e^{i(\langle k,x \rangle - \omega(k)t)} \Big) & \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}} \end{aligned} \tag{4.47}$$

mit

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\omega(k)} \hat{f}(k) + \frac{i}{\sqrt{\omega(k)}} \hat{p}(k) \right). \tag{4.48}$$

Ähnlich wie im vorangehenden Kapitel erhalten wir die einparametrige Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ von symplektischen Transformationen durch $T_t(f, p) = (f_t, p_t)$. (Symplektizität ist bitte selbst nachzurechnen! Hinweis: Verwende den Erzeuger dieser Gruppe = Hamiltonsches Vektorfeld; vergl. auch die Ausführungen im nächsten Abschnitt).

Zur Quantisierung verwenden wir wieder die CCR-Algebra $\mathrm{CCR}(V_2, \sigma)$. Die symplektischen Transformationen erzeugen wie beim harmonischen Oszillator die einparametrige Gruppe von Bogolubovtransformationen $\alpha_t(W(f, p)) = W(f_t, p_t)$. Bleibt schließlich die Wahl eines Zustandes und damit einer Darstellung. Wir betrachten zu diesem Zweck die Abbildung

$$V_2 \ni (f, p) \mapsto K_2(f, p) := \left(\sqrt{\omega} \hat{f} + \frac{i}{\sqrt{\omega}} \hat{p} \right) \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3k). \tag{4.49}$$

Sie ist was leicht nachzurechnen ist, reell-linear, symplektisch und ihr Bild ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)$. Außerdem gilt eine ähnliche Relation wie in (4.30). Um dies zu erkennen, betrachten wir den Erzeuger der einparametrigen Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (siehe Bem. 1.1.4):

$$\frac{d}{dt}(f_t, p_t)|_{t_0} = (p, (\Delta - m^2) f) =: X(f, p) \text{ mit } f_0 = f,\ p_0 = p. \tag{4.50}$$

Fouriertransformieren bildet diesen Operator auf

$$(\hat{f}, \hat{p}) \mapsto (\hat{p}, -\omega^2 \hat{f}) \tag{4.51}$$

ab. Daher ist

$$K_2(X(f,p)) = K_2(p,(\Delta - m^2)f) = \sqrt{\omega}\hat{p} - i\omega^{\frac{3}{2}}\hat{f} \tag{4.52}$$

und

$$-i\omega K_2(f,p) = -i\omega^{\frac{3}{2}}\hat{f} + \sqrt{\omega}\hat{g} \tag{4.53}$$

weshalb $K_2(X(f,p)) = -i\omega K_2(f,p)$ gilt. Anders ausgedrückt, die Abbildung K_2 „intertwined" die symplektische Gruppe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ und die unitäre Gruppe $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit $u_t\psi = \exp(-i\omega)\psi$.

Wir können einen regulären Fockzustand ω_0 auf $\mathrm{CCR}(V_2,\sigma)$ durch das erzeugende Funktional

$$\phi_{\omega_0}(f,p) = \omega_0(W(f,p))e^{-\frac{1}{4}\|K_2(f,p)\|^2} \tag{4.54}$$

definieren. Betrachten wir nun die GNS-Darstellung π_{ω_0}, dann erhalten wir auf $\mathcal{H}_{\omega_0}$ die selbstadjungierten Operatoren $\Psi(f,p)$ mit $\pi_{\omega_0}(W(f,p)) = \exp(i\Psi(f,p))$. Ähnlich wie im letzten Abschnitt definieren wir dann das Feld $\phi(f) = \Psi((-\Delta + m^2)^{-1/2}f,0)$ und den kanonisch konjugierten Impuls $\pi(p) = \Psi(0,(-\Delta + m^2)^{1/2}p)$. Wie bei dem harmonischen Oszillator ist wieder $\omega_0(\alpha_t(W(f,p)) = \omega_0(W(f,p))$ (siehe (4.32)). Daher ist die Zeitentwicklung unitär implementiert: $\pi_{\omega_0}(\alpha_t(A)) = U_t\pi_{\omega_0}(A)U_t^*$ und wir können das Quantenfeld durch

$$\Phi(t,f) = U_t\phi(f)U_t^* = \Psi(T_t((-\Delta + m^2)^{-1/2}f,0)) \tag{4.55}$$

oder durch

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,f(t,\cdot))dt \tag{4.56}$$

definieren. Ähnlich können wir auch für den Impuls

$$\Pi(t,g) = U_t\pi(g)U_t^* = \Psi(T_t(0,(-\Delta + m^2)^{1/2}g)) \tag{4.57}$$

definieren, jedoch enthält das Feld $\Pi(t,g)$ keine andere Information als $\Phi(t,f)$ denn wir können beide durch

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t,f) = \Psi(\frac{d}{dt}T_t((m^2-\Delta)^{1/2}f,0)) = \\ = \Psi(T_t(0,(\Delta - m^2)(m^2-\Delta)^{-1/2}f)) = \Pi(t,-f)\end{aligned} \tag{4.58}$$

ineinander umrechnen.

Den Übergang zu den Konstruktionen aus Abschnitt 1.3 erhalten wir nun mit Satz 4.2.6, denn wir können $\mathcal{H}_{\omega_0}$ mit dem symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}_S(L^2(\mathbb{R}^3,d^3k))$ und die Darsteller $\pi_{\omega_0}(W(f,p))$ mit $\exp(i\Phi_S(K_2(f,p)))$ identifizieren, wenn $\Phi_S(\psi)$ die Segaloperatoren aus (1.54) bezeichnen. Das heißt das weiter oben eingeführte Feld $\Psi(f,p)$ stimmt mit $\Phi_S(K_2(f,p))$ überein und wir erhalten

$$\phi(f) = \Phi_S(K_2((-\Delta + m^2)^{-1}f,0)) = \Phi_S(\frac{\sqrt{\omega}}{\omega}\hat{f}) = \Phi_S(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}) \tag{4.59}$$

und

$$\pi(p) = \Phi_S(K_2(0, (-\Delta + m^2)p)) = \Phi_S(\frac{i\omega\hat{p}}{\sqrt{\omega}}) = \Phi_S(i\sqrt{\omega}\hat{p}) \tag{4.60}$$

die Ausdrücke aus Satz 1.3.3. Die Zeitentwicklung ist ähnlich wie im letzten Abschnitt durch die zweite Quantisierung der unitären Operatoren u_t gegeben, denn es ist

$$U_t\pi_{\omega_0}(W(f,p))U_t^* = \pi_{\omega_0}(W(T_t(f,p)) = e^{i\Phi_S(K_2(T_t(f,p)))} = e^{i\Phi_S(u_t K_2(f,p))} = \\ = \Gamma(u_t)e^{\Phi_S(K_2(f,p))}\Gamma(u_t^*). \tag{4.61}$$

Dabei wurde erneut Satz 1.2.14(3) benutzt. Wir erkennen, daß u_t die einparametrige Gruppe ist, die vom „Einteilchenhamiltonian" h_0 erzeugt wird, daß heißt es gilt $u_t = \exp(-ith_0)$ (siehe[3] (1.110)) erzeugt wird. Die Zeitentwicklung $U_t = \Gamma(U_t)$ wird daher vom „freien Hamiltonian" $H_0 = d\Gamma(h_0)$ erzeugt: $U_t = \exp(-itH_0)$ in Übereinstimmung[4] mit (1.112). Wir haben also mit algebraischen Mitteln das Modell aus Abschnitt 1.3 rekonstruiert.

Im Gegensatz jedoch zum harmonischen Oszillator ist in diesem Falle die Wahl des Zustandes keineswegs egal, denn wie wir im Beispiel 4.3.2 gesehen haben, gibt es Fockzustände deren GNS-Darstellungen unitär inäquivalent sind und somit zu physikalisch anderen Modellen führen. Wir wollen daher noch ein paar Anmerkungen machen, die aufzeigen wodurch der von uns gewählte Zustand ausgezeichnet ist.

Zu diesem Zweck betrachten wir den Hilbertraum $L^2(M_m, \Omega_m)$ aus Bemerkung 1.3.7 und den unitären Operator $J_m : L^2(M_m, \Omega_m) \to L^2(\mathbb{R}^3, d^3k)$ aus Formel (1.125). Auf $L^2(M_m, \Omega_m)$ war die stark stetige, unitäre, irreduzible Darstellung $\mathcal{P}_+^\uparrow \ni (\Lambda, a) \mapsto U_m(\Lambda, a)$ durch $(U_m(\Lambda, a)f)(p) = e^{ig(p,a)f(\Lambda^{-1}p)}$ gegeben (siehe Bem.1.3.8). Kombinieren wir nun die Abbildung K_2 mit dem unitären Operator J_m dann folgt mit kurzer Rechnung (Übungsaufgabe!), daß eine Darstellung $\mathcal{P}_+^\uparrow \ni (\Lambda, a) \mapsto T_{\Lambda,a}$ der Poincarégruppe durch symplektische Transformationen $T_{\Lambda,a}$ von (V, σ) existiert, so daß $U(\Lambda, a)J_m(K_2(f,p)) = J_m(K_2(T_{\Lambda,a}(f,p)))$ ist.

Um die physikalische Bedeutung der Darstellung $T_{\Lambda,a}$ zu erklären, wiederholen wir zunächst etwas Geometrie des Minkowskiraumes. Wir betrachten den Minkowskiraum *koordinatenfrei*, das heißt ohne Bezug auf ein bestimmtes Inertialsystem. Er wird dann durch einen vierdimensionalen affinen Raum $\mathcal{M}$ beschrieben (ohne ausgezeichnetes affines Koordinatensystem!), auf dessen unterliegendem Vektorraum $\mathcal{V}$ eine symmetrische, nicht degenerierte Bilinearform g der Signatur $(+,-,-,-)$ gegeben ist[5]. Ein Inertialsystem Σ ist nun durch eine *Lorentzbasis* $(e_i)_{i=0,\ldots,3}$, daß heißt es gilt $g(e_i, e_j) = \epsilon_i\delta_{ij}$ mit $\epsilon_0 = 1$ und $\epsilon_i = -1$ für $i = 1,2,3$ und einen Koordinantenursprung $o \in \mathcal{M}$ gegeben. Wir erhalten dadurch die Koordinatenabbildung $\mathbb{R}^4 \ni (t,x) \mapsto \Sigma(t,x) := o + te_0 + \sum_{i=1}^3 x^i e_i \in \mathcal{M}$. Entsprechend erhalten wir für ein zweites Inertialsystem Σ' eine Koordinatenabbildung $\mathbb{R}^4 \ni (t', x') \mapsto \Sigma'(t', x') := o' + t'e'_0 + \sum_{i=1}^3 x'_i e'_i \in \mathcal{M}$, welche mit der alten durch eine Poincarétransformation (Λ, a) verknüpft ist, das heißt $(t', x') = \Lambda \cdot (t,x) + a$.

[3]Im Gegensatz zum Abschnitt 1.3 ist hier jedoch $u_t = \exp(-ith_0)$, das heißt die Zeit läuft in die andere Richtung. Leider ist das Skript an diesem Punkt nicht ganz konsistent.

[4]Siehe Fußnote 3.

[5]Ein affiner Raum ist eine Menge $\mathcal{M}$ auf der ein reeller Vektorraum $\mathcal{V}$ transitiv durch $\mathcal{M} \times \mathcal{V} \ni (p, v) \mapsto p + v \in \mathcal{M}$ operiert.

Auf $\mathcal{M}$ sei nun eine Funktion $\psi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ gegeben, die im Inertialsystem Σ die Klein-Gordon-Gleichung löst, genauer gesagt die Funktion $\mathbb{R}^4 \ni (t,x) \mapsto \psi(t,x) = \psi \circ \Sigma(t,x) \in \mathbb{R}$ erfüllt diese Gleichung. Entsprechend ist auch $\mathbb{R}^4 \ni (t',x') \mapsto \psi'(t',x') = \psi \circ \Sigma'(t',x') \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, welche mit der ersteren durch $\psi'(t,x) = \psi(\Lambda^{-1}((t,x) - a))$ verknüpft ist. Beide Lösungen sind durch Anfangsdaten $(f,p) \in V$, bzw. $(f',p') \in V$ eindeutig bestimmt und die Verknüpfung dieser Anfangsdaten ist gerade durch die symplektische Transformation $T_{\Lambda,a}$ gegeben, daß heißt: $T_{\Lambda,a}(f,p) = (f',p')$. Eine Überprüfung dieser Aussage überlasse ich wieder dem Leser[6].

Die symplektischen Transformationen $T_{\Lambda,a}$ und die entsprechenden Bogolubovtransformationen $\alpha_{\Lambda,a}(W(f,p)) = W(T_{\Lambda,a}(f,p))$ repräsentieren also den Wechsel des Inertialsystems und es ist eine physikalisch vernünftige Annahme, daß das Vakuum ω_0 in allen Inertialsystemen identisch ist, daß heißt $\omega_0 \circ \alpha_{\Lambda,a} = \omega_0$. Es ist leicht zu sehen, daß ω_0 diese Eigenschaft wirklich besitzt:

$$\begin{aligned}\omega_0(\alpha_{\Lambda,a}(W(f,p))) = \omega_0(W(T_{\Lambda,a}(f,p))) = e^{-\frac{1}{4}\|K_2(T_{\Lambda,a}(f,p))\|^2} = \\ = e^{-\frac{1}{4}\|J_m^{-1}U_m(\Lambda,a)J_m K_2(f,p)\|^2} = e^{\frac{-1}{4}\|K_2(f,p)\|^2} = \omega(W(f,p)).\end{aligned} \tag{4.62}$$

Daher sind die Bogolubovtransformation $\alpha_{\Lambda,a}$ in der Darstellung π_{ω_0} unitär implementiert. Das heißt es existiert eine stark, stetige unitäre Darstellung $U(\Lambda,a)$ mit $U(\Lambda,a)\pi_{\omega_0}(A)U(\Lambda,a)^* = \pi_{\omega_0}(\alpha_{\Lambda,a}(A))$. Diese Darstellung kann mit der zweiten Quantisierung $\Gamma(U_m(\Lambda,a))$ von $U_m(\Lambda,a)$ identifiziert werden.

Zum Schluß schließlich betrachten wir die durch $a \mapsto U(\mathbb{1},a)$ gegebenen Raumzeittranslationen. Es handelt sich um eine stark stetige, unitäre Darstellung der abelschen Gruppe $\mathbb{R}^4$ und für jedes Element $e_j \in \mathbb{R}^4$, $j = 1,\dots,4$ der kanonischen Basis existiert daher ein selbstadjungierter Operator P_i so daß $\exp(itP_j) = U(te_j)$. Für $j \neq 0$ sind die P_j Komponenten des Gesamtimpulses, während P_0 mit dem freien Hamiltonian übereinstimmt. Es kann nun gezeigt werden (siehe hierzu die Diskussion der Wightmanaxiome in [RS75, X.42]), daß das gemeinsame Spektrum dieser vier Operatoren im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid g(x,x) \geq 0, x_0 \geq 0\}$ enthalten ist. Mit anderen Worten der Zustand ω_0 erfüllt die “Spektralbedingung”. Poincaréinvarianz und Spektralbedingung sind die wichtigsten Kriterien zur Auswahl eines Vakuumzustandes. Insbesondere in der Wightmantheorie dient die Translationsinvarianz des Vakuums dazu, dieses eindeutig festzulegen (siehe z.B. [RS75, IX.8] für eine Diskussion der Wightmanaxiome).

4.6 Beispiel: Das Skalarfeld im äußeren Potential

Im nächsten Beispiel wollen wir die Behandlung des freien Feldes etwas verallgemeinern und äußere Potentiale hinzufügen. Das heißt wir betrachten Feldgleichungen der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,x) - \Delta\psi(t,x) + (S(x) + m^2)\psi(t,x) = 0, \tag{4.63}$$

[6]Hinweis: Betrachte die Fouriertransformation $\tilde{\psi} = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^4}\psi(x)\exp(ig(x,p))d^4x$. Sie bildet Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung auf Elemente in $L^2(M_m,\Omega_m)$ ab. Mann kann dann ausrechnen daß $U_m(\Lambda,a)\tilde{\psi}$ das Bild der Poincarétransformierten Lösung ist.

wobei $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein hinreichend reguläres, positives Potential ist. Die klassischen Lösungen dieser Gleichungen lassen sich auch bei bekanntem Potential im allgemeinen nicht in geschlossener Form angeben. Es handelt sich jedoch um strikt hyperbolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die intensiv studiert wurden. Es existieren zahlreiche Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen (siehe [P.R64, Kap.6] für eine recht elementare Einführung in hyperbolischer Differentialgleichung mehrerer Veränderliche. Auch die Ausführungen in [Fri75] lassen sich unmittelbar auf den flachen Fall übertragen). Wir wollen im folgenden davon ausgehen, daß S die folgende Bedingung erfüllt[7]: Für alle Anfangsdaten $(f, p) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) =: V_3$ existiert genau eine Lösung von (4.63).

Wir können nun ähnlich wie bei der Klein-Gordon-Gleichung die Feldgleichung (4.63) in ein System erster Ordnung umwandeln:

$$\frac{d}{dt} f_t = p_t, \frac{d}{dt} p_t = (\Delta - m^2 - S) f_t. \tag{4.64}$$

Der Operator $-\Delta + m^2 + S : C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ ist symmetrisch, daher ist die Abbildung $V_3 \ni (f, p) \mapsto (p, (\Delta - m^2 - S)f) \in V_3$ antisymmetrisch bzgl. der symplektischen Form σ aus (4.45):

$$\begin{aligned} \sigma(f_1, p_1; p_2, (\Delta - m^2 - S)f_2) &= \langle f_1, (\Delta - m^2 - S)f_2 \rangle - \langle p_1, p_2 \rangle = \\ &= \langle (\Delta - m^2 - S)f_1, f_2 \rangle - \langle p_1, p_2 \rangle = -\sigma(p_1, (\Delta - m^2 - S)f_1; f_2, p_2). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Daher ist die einparametrige Gruppe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit $T_t(f, p) = (f_t, p_t)$ und $f_0 = f$ und $p_0 = p$ (das heißt $t \mapsto T_t(f, p)$ ist die Lösung von (4.64) zu den Anfangsdaten (f, p)) eine einparametrige symplektische Gruppe und wir können auf der CCR-Algebra $CCR(V_3, \sigma)$ (die etwas kleiner ist als die aus 4.5, da $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nur dicht liegt) die einparametrige Gruppe von Bogolubovtransformationen $\alpha_t(W(f, p)) = W(T(f, p))$ definieren. Diese Gruppe beschreibt die Dynamik des skalaren Feldes unter dem Einfluß des äußeren Potentials S.

Damit bleibt die Wahl eines Zustandes und einer Darstellung zu diskutieren. Wir stellen zu diesem Zweck fest, daß der Operator $-\Delta + m^2 + S$ nicht nur symmetrisch sondern auch positiv ist. Er besitzt daher auf jeden Fall eine positive selbstadjungierte Fortsetzung (die Friedrichsfortsetzung siehe [RS75, Thm X.23]). Wir wollen diese Fortsetzung im folgenden auch mit $-\Delta + m^2 + S$ bezeichnen. Außerdem bleibt noch festzuhalten, daß wegen der Positivität des Potentials S das Spektrum dieses Operators nach unten durch $m^2 > 0$ beschränkt ist. Wir können also mittels des Spektraltheorems die Funktion $(\cdot)^{\pm\frac{1}{4}}$ auf den Operator anwenden. Dies führt zur folgenden Abbildung

$$\begin{aligned} V \ni (f, p) \mapsto K_3(f, p) := (-\Delta + m^2 + S)^{\frac{1}{4}} f + i(-\Delta + m^2 + S)^{-\frac{1}{4}} p \in \\ \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3x). \end{aligned} \tag{4.66}$$

[7] Der Operator $(f, p) \mapsto (p, (\Delta - m^2 - S)f)$ den wir sogleich betrachten werden bildet Anfangsdaten mit kompakten Träger auf Anfangsdaten mit kompakten Träger ab. Eine ähnliche Aussage gilt nicht für Schwartzfunktionen, wenn S im Unendlichen zu schnell divergiert. Daher haben wir in diesem Abschnitt einen gegenüber 4.5 etwas kleineren Phasenraum gewählt

Da sowohl $(-\Delta + m^2 + S)^{\frac{1}{4}}$ als auch $(-\Delta + m^2 + S)^{-\frac{1}{4}}$ dicht definierte Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ sind, ist das Bild von K_3 offenbar dicht in $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$. Außerdem ist K_3 symplektisch, denn

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\langle K(f_1,p_1), K(f_2,p_2)\rangle &= \langle(-\Delta+m^2+S)^{\frac{1}{4}}f_1, (-\Delta+m^2+S)^{-\frac{1}{4}}p_2\rangle - \\ &- \langle(-\Delta+m^2+S)^{-\frac{1}{4}}p_1, (-\Delta+m^2+S)^{\frac{1}{4}}f_2\rangle = \langle f_1,p_2\rangle - \langle f_2,p_1\rangle. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Damit ist durch

$$\omega_0(W(f,p)) = e^{-\frac{1}{4}\|K_3(f,p)\|^2} \tag{4.68}$$

ein Fockzustand definiert. Um zu sehen, daß er invariant unter der Dynamik α_t ist betrachten wir die einparametrige unitäre Gruppe

$$u_t = e^{-it\sqrt{-\Delta+m^2+S}}. \tag{4.69}$$

Offenbar ist:

$$\begin{aligned}&-i\sqrt{-\Delta+m^2+S}K_3(f,p) = \\ &\quad = -i(-\Delta+m^2+S)^{\frac{3}{4}}f + (-\Delta+m^2+S)^{\frac{1}{4}}p = K_3(p,(\Delta-m^2-S)f).\end{aligned} \tag{4.70}$$

Nun ist jedoch $(f,p) \mapsto (p,(\Delta-m^2-S)f)$ der Erzeuger der einparametrigen symplektischen Gruppe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$, woraus $u_tK_3(f,p) = K_3(T_t(f,p))$ folgt. Daher ist

$$\omega_0(\alpha_t(W(f,p))) = e^{-\frac{1}{4}\|K_3(T_t(f,p))\|^2} = e^{-\frac{1}{4}\|u_tK_3(f,p)\|^2} = \omega_0(W(f,p)). \tag{4.71}$$

Die Bogolubovtransformationen α_t sind daher unitär implementierbar, weshalb wir eine einparametrige unitäre Gruppe U_t mit Erzeuger H, dem Hamiltonian des Systems erhalten. Wie für das freie Feld können wir außerdem den Feldoperator $\phi(f) = \Psi((-\Delta+m^2+S)^{-1/2}f, 0)$ und $\pi(p) = \Psi(0,(-\Delta+m^2+S)^{1/2}p)$ definieren, wobei $\Psi(f,p)$ durch $e^{i\Psi(f,p)} = \pi_0(W(f,p))$ definiert ist. Identifizieren wir den GNS-Hilbertraum wieder gemäß Satz 4.2.6 mit dem Fockraum $\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$, dann wird U_t zu $\Gamma(u_t)$, H zu $d\Gamma(\sqrt{-\Delta+m^2+S})$, $\phi(f) = \Phi_S((-\Delta+m^2+S)^{-\frac{1}{4}}f)$ und $\pi(p) = \Phi_S(i(-\Delta+m^2+S)^{\frac{1}{4}}p)$.

Setzen wir $S = 0$, dann wird die Feldgleichung (4.63) zur Klein-Gordon-Gleichung und wir erhalten eine alternative Quantisierung des freien Feldes, die jedoch im Wesentlichen mit der in Abschnitt 4.5 vorgestellten Version übereinstimmt. Der einzige Unterschied betrifft die CCR-Algebra, denn es gilt, wie bereits erwähnt $\mathrm{CCR}(V_3,\sigma) \subsetneq \mathrm{CCR}(V_2,\sigma)$. Dieser Unterschied ist jedoch nicht wesentlich, da sowohl die Bogolubovtransformationen α_t als auch der Fockzustand ω_0 aus diesem Abschnitt für den Fall $S = 0$ Einschränkungen der entsprechenden Größen aus Abschnitt 4.5 sind. Für die Bogolubovtransformationen ist dies ganz offensichtlich, da die symplektischen Transformationen völlig identisch definiert sind. Um die Fockzustände zu vergleichen betrachten wir die Abbildungen $K_3 : V_3 \to L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ und die entsprechende Abbildung K_2 aus (4.49). Fouriertransformieren wir nun $K_3(f,p)$ für $(f,p) \in V_3$ dann ergibt sich sofort $(K_3(f,p))^\wedge = K_2(f,p)$. Da die Fouriertransformation unitär ist, folgt sofort daß der in diesem Abschnitt konstruierte Fockzustand und der aus Abschnitt 4.5 übereinstimmen. Daß nun bei der „Einschränkung“ von

$CCR(V_2,\sigma)$ auf $CCR(V_3,\sigma)$ keine wesentliche Information verloren geht, folgt aus der Tatsache, daß $\pi_{\omega_0}(CCR(V_2,\sigma))'' = \pi_{\omega_0}(CCR(V_3,\sigma))'' = \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\omega_0})$ ist (es sind also noch „genug" Elemente in $CCR(V_3,\sigma)$ enthalten).

Der letzte Punkt dieses Abschnittes betrifft die Frage durch welche Kriterien der konstruierte Zustand ω_0 physikalisch ausgezeichnet ist. Hierfür möchte ich auf eine Arbeit von Kay [Kay79] verweisen. Aus ihr folgt unmittelbar, daß ω_0 bis auf Unitäräquivalenz der einzige Fockzustand auf $CCR(V_3,\sigma)$ ist, der invariant unter der Zeitentwicklung α_t ist.

4.7 Beispiel: Das van Hove Modell

Im letzten Beispiel zu CCR-Algebren wollen wir auf das van Hove Modell zurückkommen welches wir bereits im Abschnitt 1.5 untersucht hatten. Wir betrachten für diesen Zweck die CCR-Algebra $CCR(V_2,\sigma)$ und die Bogolubovtransformationen α_t und den Fockzustand ω_0 aus Abschnitt 4.5. Die Quantisierung der Feldgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,x) - \Delta\psi(t,x) + m^2\psi(t,x) + \rho(x) = 0, \tag{4.72}$$

mit der Schwartzfunktion $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ (siehe (1.135)) führte in Abschnitt 1.4 zu einer unitär äquivalenten Theorie, deren Vakuum durch

$$\omega_\rho(A) = \langle V\Omega_{\omega_0}, \pi_{\omega_0}(A)V\Omega_{\omega_0}\rangle \tag{4.73}$$

und deren Dynamik[8] α_t^ρ durch

$$\pi_{\omega_0}(\alpha_t^\rho(A)) = U_{\rho,t}\pi_{\omega_0}(A)U_{\rho,t}^* \text{ mit } U_{t,\rho} = VU_tV^* \tag{4.74}$$

gegeben ist. Dabei ist $U_t = \exp(-itH_0)$ durch den freien Hamiltonian H_0 (siehe Abschnitt 4.5) und V durch (π ist der kanonisch konjugierte Impuls aus Abschnitt 4.5)

$$V = e^{-i\pi(\tilde{h}_0^{-2}\rho)} \text{ mit } \tilde{h}_0 f = (\omega\hat{f})^\vee = \sqrt{m^2-\Delta}f \tag{4.75}$$

wegen (4.57) also durch

$$V = \pi_{\omega_0}(W(0, -\tilde{h}_0^{-3/2}\rho)) \tag{4.76}$$

gegeben.

Wir wollen nun angeben, welche Gestalt α_t^ρ unabhängig von der Darstellung π_{ω_0} hat. Unter Verwendung der Weylrelationen erhalten wir

$$V^*\pi_{\omega_0}(W(f,p))V = \pi_{\omega_0}\left(W(0,\tilde{h}_0^{-3/2}\rho)W(f,p)W(0,-\tilde{h}_0^{-3/2}\rho)\right) = \\ = e^{-ic(\rho;f,p)}\pi_{\omega_0}(W(f,p)) \tag{4.77}$$

[8] Obwohl wir hier dieselbe Bezeichnung gewählt haben, stimmt α_t^ρ nicht mit den Automorphismen aus Abschnitt 1.5 überein. Die Algebra $\mathfrak{A}$ die wir dort betrachtet haben, ist eine *-Algebra, jedoch keine C*-Algebra (und damit auch keine CCR-Algebra), da sie unbeschränkte Operatoren enthält.

mit

$$c(\rho; f, p) := \left\langle \frac{\hat{\rho}}{\omega}, \hat{f} \right\rangle . \tag{4.78}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\pi_{\omega_0}(\alpha_t^\rho(W(f,p))) = VU_tV^*\pi_{\omega_0}(W(f,p))VU_rtV^* = \\ = U_t\pi_{\omega_0}U_t^* e^{i(c(\rho;T_t(f,p))-c(\rho;f,p))}\end{aligned} \tag{4.79}$$

also

$$\alpha_t^\rho(W(f,p)) = \alpha_t(W(f,p))e^{i(c(\rho;T_t(f,p))-c(\rho;f,p))} . \tag{4.80}$$

In ähnlicher Weise können wir bei der Berechnung des erzeugenden Funktionals des Zustandes ω_ρ vorgehen. Mit (4.77) folgt:

$$\begin{aligned}\omega_\rho(W(f,p)) = \langle V\Omega_0, \pi_{\omega_0}(W(f,p))V\Omega_0\rangle = \langle \Omega_0, V^*\pi_{\omega_0}(W(f,p))V\Omega_0\rangle = \\ = \omega_0(W(f,p))e^{-ic(\rho;f,p)} = e^{-\frac{1}{4}\|K_2(f,p)\|^2 - ic(\rho;f,p)} .\end{aligned} \tag{4.81}$$

Aus der Definition von α_t^ρ und ω_ρ folgt unmittelbar, daß ω_ρ invariant unter der Dynamik α_t^ρ ist; jedoch kann dies auch unter Verwendung der soeben errechneten Formeln überprüft werden.

Dies ist besonders wichtig, wenn wir nun den „Grenzübergang“ $\hat{\rho} \to 1$ durchführen (also den Ultraviolett-Cutoff entfernen), denn der Ausdruck

$$c(\delta; f, p) := \left\langle \frac{1}{\omega}, \hat{f} \right\rangle . \tag{4.82}$$

ist offenbar für jede Schwarzfunktion f wohldefiniert. Wir können daher

$$\alpha_t^\delta(W(f,p)) := \alpha_t(W(f,p))e^{i(c(\delta;T_t(f,p))-c(\delta;f,p))} \tag{4.83}$$

und

$$\phi_{\omega_\delta}(f,p) := e^{-\frac{1}{4}\|K_2(f,p)\|^2 - ic(\delta;f,p)} \tag{4.84}$$

definieren. Damit sich aus diesen Definitionen eine vernünftige Quantentheorie ergibt, müssen wir überprüfen, ob sich α_t^δ zu einem Automorphismus von CCR(V_2, σ) fortsetzen läßt, und ob ϕ_{ω_δ} das erzeugende Funktional eines regulären Zustandes ist.

Wir untersuchen zunächst α_t^δ. Da alle Weyloperatoren linear unabhängig sind (ist leicht nachzurechnen; Übungsaufgabe!) kann α_t^ρ auf den Raum aller endlichen Linearkombinationen von Weyloperatoren fortgesetzt werden. Dieser Raum ist eine dichte *-Unteralgebra von CCR(V_2, σ), und wir können zeigen, daß α_t^δ ein *-Automorphismus dieser Unteralgebra ist. Z.B. gilt:

$$\begin{aligned}\alpha_t^\delta(W(f_1,p_1)W(f_2,p_2)) &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f_1,p_1;f_2,p_2)}\alpha_t^\delta(W(f_1+p_2,p_1+p_2)) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f_1,p_1;f_2,p_2)}\alpha_t(W(f_1+f_2,p_1+p_2))e^{i(c(\delta;T_t(f_1+f_2,p_1+p_2))-c(\delta;f_1+f_2,p_1+p_2))} \\ &= \alpha_t(W(f_1,p_1))\alpha_t(W(f_2,p_2))e^{i(c(\delta;T_t(f_1,p_1))-c(\delta;f_1,p_1))}e^{i(c(\delta;T_t(f_2,p_2))-c(\delta;f_2,p_2))} \\ &= \alpha_t^\delta(W(f_1,p_1))\alpha_t^\delta(W(f_2,p_2)).\end{aligned} \tag{4.85}$$

Daher gilt für alle $A \in \mathrm{CCR}(V_2, \sigma)$ die endliche Linearkombinationen von Weylelementen sind $\|\alpha_t^\delta(A)\| \leq \|A\|$ (das folgt aus Behauptung 2.4.2). Mit anderen Worten α_t^δ ist auf seinem Definitionsbereich stetig und kann daher als Automorphismus auf ganz $\mathrm{CCR}(V_2, \sigma)$ fortgesetzt werden.

Um zu beweisen, daß ϕ_{ω_δ} ein erzeugendes Funktional ist benutzen wir Behauptung 4.2.3. Die einzige nichttriviale Bedingung ist offenbar die Positivität. Hierfür betrachten wir für jede temperierte Distribution[9] T, das Funktional

$$\phi_T(f,p) := e^{-\frac{1}{4}\|K_2(f,p)\|^2 - ic(T;f,p)} \tag{4.86}$$

mit

$$c(T;f,p) := \left\langle \frac{\hat{\rho}}{\omega}, \hat{T} \right\rangle. \tag{4.87}$$

Für feste $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $(f_j, p_j) \in V_2$, $j = 1, \dots, n$ ist auf dem Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ durch

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ni T \mapsto \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_l \lambda_j e^{-\frac{i}{2}\sigma(f_j,p_j;f_l,p_l)} \phi_T(f_j - f_l, p_j - p_l) \in \mathbb{C} \tag{4.88}$$

ein in der schwachen Topologie stetiges Funktional gegeben. Dies folgt aus der Stetigkeit der Funktionale $T \mapsto c(T;f,p)$. Diese Funktionale sind für alle $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ positiv, da ϕ_ρ in diesem Falle ja mit dem erzeugendem Funktional des regulären Zustandes ω_ρ übereinstimmt. Da aber $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ist, müssen die Funktionale (4.88) für alle T positiv sein. Daher ist insbesondere ϕ_{ω_δ} das erzeugende Funktional eines regulären Zustandes ω_δ.

Damit haben wir die Quantisierung der Feldgleichung (4.72) vervollständigt. Es ist leicht nachzuprüfen, daß ω_δ invariant unter den α_t^δ ist. Daher existieren unitäre Operatoren $U_{\delta,t}$ mit $U_{\delta,t}\pi_{\omega_\delta}(A)U_{\delta,t}^*\pi_{\omega_\delta}(\alpha_t^\delta(A))$. Die $U_{\delta,t}$ bilden offenbar eine unitäre Gruppe. Wenn diese stark stetig ist (was nachzuprüfen wäre) können wir den Hamiltonian des Modells durch $U_{\delta,t} = \exp(-itH_\delta)$ definieren. Ebenso können wir in Analogie zu Abschnitt 4.5 die Felder $\phi_\delta(f)$ und $\pi_\delta(p)$ angeben.

Wie haben damit im Gegensatz zu Abschnitt 1.5 für das van Hove Modell ein *physikalisches Vakuum* und einen *Wechselwirkungshamiltonian* gefunden. Jedoch kann ähnlich wie in Beispiel 4.3.2 gezeigt werden, daß die Zustände ω_δ und ω_0 quasiinäquivalent sind. Daher ist in der Darstellung ω_δ das nackte Vakuum ω_0 nicht als Vektorzustand darstellbar, ähnlich umgekehrt ω_δ in der Vakuumdarstellung des freien Feldes nicht als Vektorzustand darstellbar war (siehe Satz 1.5.1). Ähnliches gilt für den freien Hamiltonian und den Wechselwirkungshamiltonian H_δ.

[9] Eigentlich wollte ich den Begriff der Distribution in diesem Skript vermeiden, um die mathematischen Voraussetzungen nicht noch umfangreicher werden zu lassen. Leider ist mir aber an dieser Stelle kein anderes einfaches Argument eingefallen. Alle notwendigen Aussagen über temperierte Distributionen finden sich jedoch in [RS80].

Literaturverzeichnis

[Ara71] H. Araki. On quasifree states of the canonical commutation relations II. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 7:121–152, 1971.

[BD67] J.D. Bjorken and S.D. Drell. *Relativistische Quantenfeldtheorie*. Number 101 in Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

[BR77] A. O. Barut and R Raczka. *Theory of group representations and applications*. Polish Scientific Publishers, Warschau, 1977.

[BR79] O. Bratelli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics*, volume 1. Springer, Berlin, 1979.

[BR81] O. Bratelli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics*, volume 2. Springer, Berlin, 1981.

[BW92] H. Baumgärtel and M. Wollenberg. *Causal nets of operator algebras*. Akademie Verlag, Berlin, 1992.

[CM74] P. Chernoff and J. E. Marsden. *Infinite dimensional Hamiltonian systems*. Springer, Berlin, 1974.

[Coo61] J. M. Cook. Asymptotic properties of a boson field with given source. *J. Math. Phys.*, 2:33–45, 1961.

[Die75] J. Dieudonné. *Grundzüge der modernen Analysis*, volume 1. Vieweg, Braunschweig, 1975.

[Emc72] Gerard G. Emch. *Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory*. Wiley-Intersience, New York et al., 1972.

[Fri75] F. G. Friedlander. *The wave equation on a curved space-time*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.

[Got80] M. J. Gotay. Functorial geometric quantization and van Hove's theorem. *Int. J. Theor. Phys.*, 19:139ff, 1980.

[HP57] E. Hille and R.S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups*. AMS-Publications, Providence, Rhode Island, 1957.

[Kay79] B. S. Kay. A uniqueness result in the Segal-Weinless approach to linear Bose fields. *J. Math. Phys.*, 20:1712–1713, 1979.

[Par92] K. R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus.* Birkhäuser, Basel, 1992.

[P.R64] P.R.Garabedian. *Partial differential equations.* Wiley, New York, 1964.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics*, volume 2. Academic Press, San Diego, 1975.

[RS79] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics*, volume 3. Academic Press, New York, 1979.

[RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics*, volume 1. Academic Press, San Diego, 1980.

[Woo80] N. Woodhouse. *Geometric quantization.* Clarendon Press, Oxford, 1980.